Zu Aufg. 1

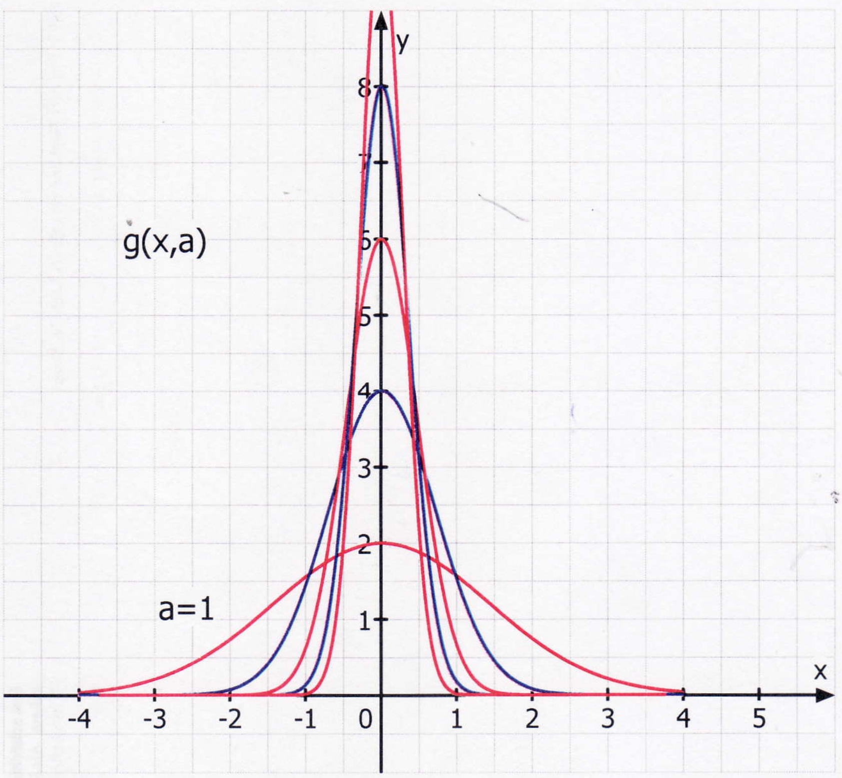
MatheGrafix.de

ANALYSIS Funktionsgraphen

Funktionsgleichungen

f(x,t) = 2*t*exp(-x^2/4*t^2)

$g_a(x)$



zu Aufg. 1

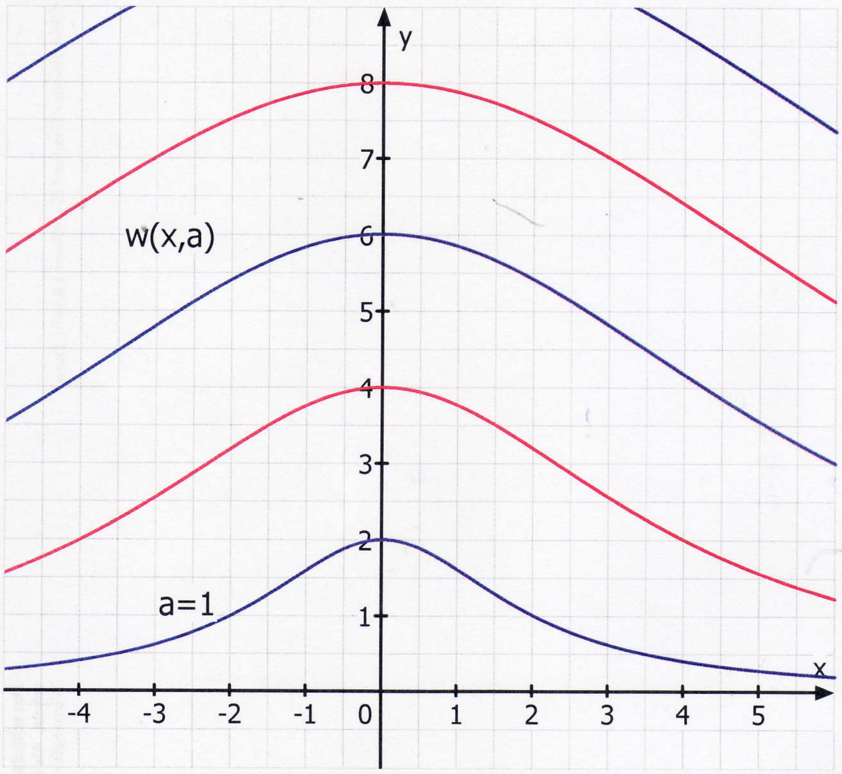
MatheGrafix.de

ANALYSIS Funktionsgraphen

Funktionsgleichungen

f(x,t) = 8*t^3/(x^2+4*t^2)

$w_a(x)$



2.2) In der Aufgabenstelung war $W_a(x) = 4 \cdot a^2 \cdot arctan(\frac{x}{2a})$ gegeben

Nun soll man zeigen, dass W_a eine Stammfunktionsschar von w_a ist:

Hierzu benötigen wir die Ableitung von W_a:

$$W'_a = 4a^2 \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{2a})^2} \cdot \frac{1}{2a}$$

Dies können wir so machen, da wir die Ableitung vom arctan ausgerechnet haben und sie vorgegeben war. Außerdem erlaubt es uns die Kettenregel:

$$= 2a \cdot \frac{1}{1+x \cdot (\frac{1}{2a})^2}$$

Nun erweitern wir mit $4a^2$ um den unpraktischen Nenner zu vereinfachen:

$$= 2a \cdot \frac{4a^2}{4a^2+x^2} = \frac{8a^3}{4a^3+x^2}$$

Nun haben wir gezeigt, dass W_a eine Stammfunktionsschar von w_a ist und haben somit die Aufgabe beendet. --Jeanneaux 08:38, 23. Mär. 2012 (CET)

~~7.1.3~~ Aufgabe 3

Lösungsstrategie:

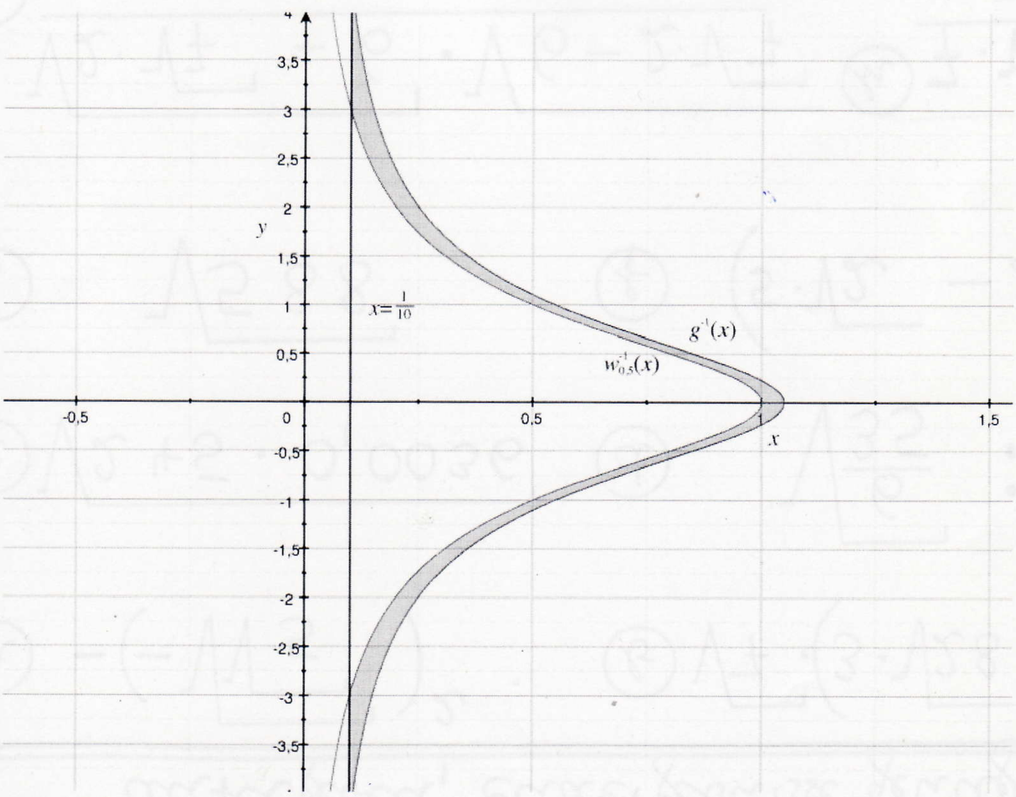
Damit man das Mantelvolumen der Glocke berechnen kann, muss man zuallererst die Hochpunkte der Graphen von $w_{0,5}(x)$ und g(x) bestimmen.

Sobald diese berechnet sind, bildet man die Umkehrfunktion beider Graphen.

Nachdem dies geschehen ist, subtrahiert man das Volumenintegral von der Umkehrfunktion von $w_{0,5}(x)$ in den Grenzen von 0,1 (da $y = \frac{1}{10}$) bis zu dem Funktionswert des Hochpunkts von $w_{0,5}(x)$ von dem Volumenintegral von der Umkehrfunktion von g(x) in den Grenzen von 0,1 (da $y = \frac{1}{10}$) bis zu dem Funktionswert des Hochpunkts von g(x).

Dadurch erhält man das Mantelvolumen der Glocke.

Zur Illustration:



---

1. Hochpunkte bestimmen:

Um nun zu erfahren, welche obere Grenze wir für das Volumenintegral benötigen, bestimmen wir zunächst die Hochpunkte der Graphen von $w_{0,5}(x)$ und $g(x)$.

Aus der Aufgabe 1.3. wissen wir, dass $w_a'(x) = -\frac{8a^3 \cdot 2x}{(x^2+4a^2)^2}$.

Zudem wissen wir aus der Aufgabenstellung, dass $g(x)=w_{0,5}(x)+0,05$ ist.

Die Ableitung von $g(x)$ wäre somit gleich $w'_{0,5}(x)$.

$$g'(x) = w_{0,5}'(x)$$

Nun bestimmen wir dem Hochpunkt von $w_{0,5}(x)$.

$$w_{0,5}'(x) = -\frac{8 \cdot 0,5^3 \cdot 2x}{(x^2+4 \cdot 0,5^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Wir setzen die Ableitung gleich Null, um die die Stelle des Extrempunktes zu bestimmen.

$$0 = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad |\cdot(x^2+1)^2 \quad x \neq 0$$

$$0 = -2x \quad |\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$x = 0$$

Nun überprüfen wir, ob ein Hochpunkt an der Stelle x=0 existiert, jedoch ist auch ohne die Rechnung bekannt, dass ein Hochpunkt existiert, da zu der Aufgabenstellung eine Skizze gegeben ist (Material 2).

Aus 1.3. kennen wir die zweite Ableitung von $w_a(x)$.

Diese lautet:

$$w_a''(x) = \frac{48x^2a^3 - 64a^5}{(x^2+4a^2)^3}$$

Nun setzen wir a gleich 0,5 und danach x gleich Null, um zu bestätigen, dass ein Hochpunkt existiert.

$$w_{0,5}''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$w_{0,5}''(0) = \frac{6 \cdot 0^2 - 2}{(0^2+1)^3} = \frac{-2}{1} = -2 \leftarrow HP$$

Nun können wir den Hochpunkt bestimmen, indem wir die Stelle des Hochpunkts in $w_{0,5}(x)$ einfügen, um den y-Wert zu erhalten.

$$w_{0,5}(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \qquad HP(0|1)$$

Da $g'(x)=w'_{0,5}(x)$, ist die Stelle des Hochpunkts von $g(x)$ identisch mit der Stelle des Hochpunkts von $w_{0,5}(x)$ und da $g''(x)=w''_{0,5}(x)$ gilt die Bestätigung des Hochpunkts auch für $g(x)$.

Nun muss lediglich der y-Wert des Hochpunkts berechnet werden.

$$g(0) = w_{0,5}(0) + 0,05 = \frac{21}{20} = 1,05 \qquad HP(0|1,05)$$

2. Umkehrfunktionen bestimmen

Nun bilden wir die Umkehrfunktionen beider Graphen.

Umkehrfunktion von $w_{0,5}(x)$:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad |()^{(-1)}$$

$$\frac{1}{y} = 1+x^2 \quad |-1$$

$$\frac{1}{y} - 1 = x^2 \quad |\sqrt{()}$$

$$\sqrt{\frac{1}{y}-1} = x$$

$$w_{0,5}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

Umkehrfunktion von $g(x)$:

$$y = \frac{1}{1+x^2} + 0,05 \quad |-0,05$$

$$y - 0,05 = \frac{1}{1+x^2} \quad |()^{-1}$$