Folgen und Vollständige Induktion

1b) $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q)} = \frac{1}{1-q}$$

Bemerkung: Beim letzten Schritt wird die Voraussetzung 0 < q < 1 benötigt.

2)

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{64}{80} = \frac{51{,}2}{64} = \frac{40{,}96}{51{,}2} = \frac{4}{5}$$

$$s = 100\text{ cm} + \sum_{n=1}^{\infty} (160\text{ cm}) \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$= 100\text{ cm} + \frac{160}{1-\frac{4}{5}}\text{ cm}$$

$$= 900\text{ cm}$$

Die Kugel legt einen Weg von 9 m zurück.

3)

a) $a_0 = 30\text{ kg}$
$a_{n+1} = 0{,}7 \cdot a_n + 30$

b)

n in Wochen	a_n in kg
0	30
1	51
2	65,7
3	75,99
4	83,193
5	88,235
6	91,765
7	94,235
8	95,965

Nach 8 Wochen sind 95,965 kg des Herbizides auf dem Feld.

c) Der Abbauprozess nach der 8-wöchigen Herbizidbehandlung kann mit der Folge $a_n = 95{,}965 \cdot 0{,}7^n$ beschrieben werden.

aus $a_n = 1$ kg folgt:

$$1 \geq 95{,}965 \cdot 0{,}7^n$$

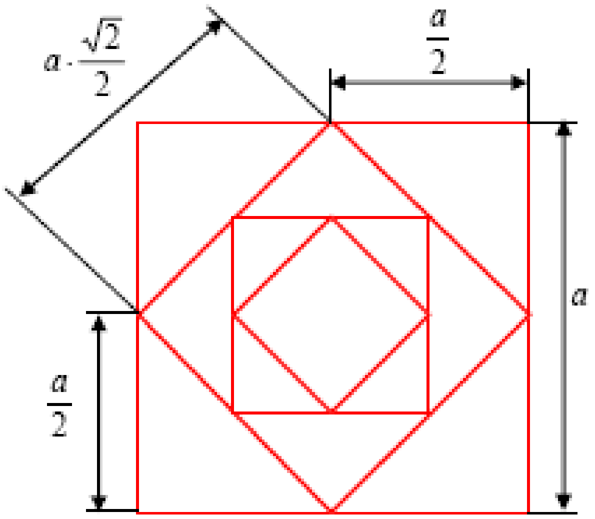
$$n \geq \frac{\ln\frac{1}{95{,}965}}{\ln 0{,}7} \approx 12{,}8\text{ Wochen}$$

d) Partialsummenformel für $n \to \infty$:

$$s = \frac{a_0}{1-q} = \frac{30}{1-0{,}7} = 100\text{ kg}$$

4.

Sei a_n die Seitenlänge des n-ten einbeschriebenen Quadrates, so gilt: $a_n = a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$



Quadratflächen: $\mathrm{A}_n = a_n^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2 \text{ FE}$$

Quadratumfänge: $\mathrm{u}_n = 4 \cdot a_n = 4 \cdot a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right) \approx 13{,}66a \text{ LE}$$

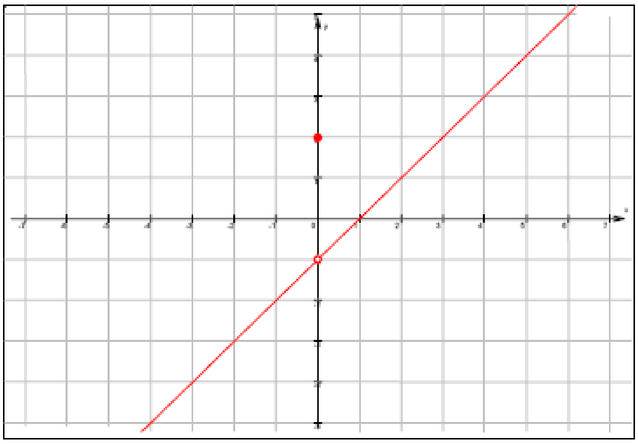
MIES-VAN-DER-ROHE-SCHULE

Berufskolleg für Technik des Schulverbandes
in der StädteRegion Aachen

Stetigkeit

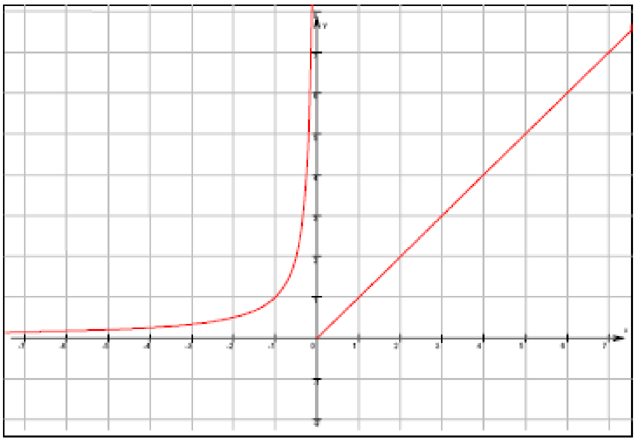
1.

a)



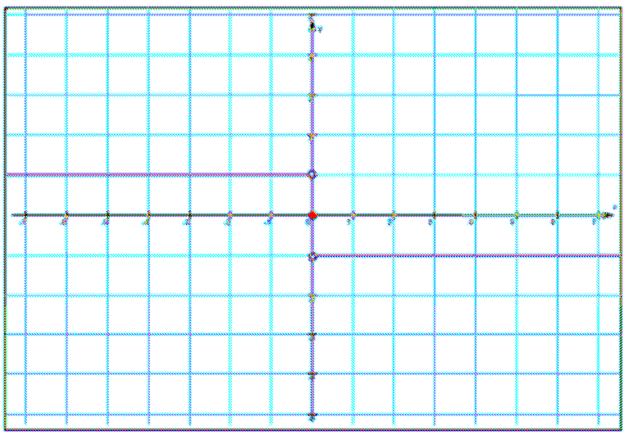
nicht stetig bei $x_0 = 0$

b)



nicht stetig bei $x_0 = 0$

c)



nicht stetig bei $x_0 = 0$

zu 1. Bedingung für Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,

d.h. für jede Folge $<x_n>$ mit $\lim\limits_{x \to a} x_n = a$ und $x_n \neq a \; \forall n$ muss diese Bedingung erfüllt sein.

a) Sei $<x_n>$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{x \to a} x_n = a$ und $x_n \neq a \; \forall n$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(x-1) = a - 1 = f(a) \;\; für \; a \in R, \; a \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to o}(x-1) = -1 \neq 2 = f(0)$$

Also ist f(x) überall stetig außer bei x=0.

Bemerkung: Wenn f(0)=-1 gelten würde, wäre diese Funktion über ganz R stetig.

b), c): Ähnlich wie bei a). An den Unstetigkeitsstellen (siehe Graphen auf der vorigen Seite) ist die Bedingung für Stetigkeit nicht erfüllt. Das kann mit einer beliebigen Folge, die sich von rechts bzw. von links dieser Stelle nähert, gezeigt werden.

2. x=0 ist die einzige problematische Stelle.

Es gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (mit l'Hospital)

Daher kann für x=0 gesetzt werden: $f(0) = 1$. Also:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & mit \;\; x \in R \setminus \{0\} \\ 1 & mit \;\; x = 0 \end{cases}$$

<u>Extremwertaufgaben</u>

Kontrolllösungen

Aufg. 12: r = h = $\sqrt[3]{\pi}$

Aufg. 16: x = 2,4cm ; y = 4cm

Aufg. 17: x=a/2+b/4 liegt im Definitionsbereich von A(x), also $b/4<a<3/2b$, und $A_{max}=(a/2+b/4)^2$ für x=y=a/2+b/4.

Differenzierbarkeit

1) Der Nachweis funktioniert prinzipiell genauso wie bei der Funktion f(x)= |x|, x_0=0. Den Nachweis für Unstetigkeit bei dieser Funktion an der angegebenen Stelle haben wir im Unterricht ausführlich besprochen, einfach mal in der Mitschrift nachschaun.

2) f(x)= |x|: Überall stetig, aber an der Stelle x=0 nicht differenzierbar.
Den umgekehrten Fall kann es nicht geben:
Differenzierbarkeit bedeutet, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Dieser Grenzwert kann aber nur existieren, wenn der Zähler gegen 0 konvergiert, d.h. wenn gilt: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$. Daraus folgt:

$$0=\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=\lim_{x\to a}f(x)-f(a)\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Also: Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit!

3) Beispielhaft für die Funktion $f_2(x)=6x^3$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{6x^3-6a^3}{x-a}=6\cdot\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=6\cdot\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=6\cdot\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=6\cdot(\lim_{x\to a}x^2+\lim_{x\to a}ax+\lim_{x\to a}a^2)=6\cdot(a^2+a^2+a^2)=18a^2$$

4) Sei $f(x)=u(x)+v(x)$. Dann folgt:

$$f\,'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{u(x)+v(x)-(u(a)+v(a))}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(u(x)-u(a))+(v(x)-v(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{v(x)-v(a)}{x-a}=u\,'(x)+v\,'(x)$$

Grenzwerte von Funktionen

1)
- Zählergrad größer Nennergrad => Divergenz
- Zählergrad gleich Nennergrad: Grenzwert a/b, wobei a der Faktor vor der höchsten Potenz im Zähler und b Faktor vor der höchsten Potenz im Nenner ist.
- Zählergrad kleiner Nennergrad: Grenzwert: 0

2) Beispiellösungen (mit MuPad können die Lösungen berechnet werden):

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-4)=0;$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1\ (mit\ l'Hospital)\qquad \lim_{x\to\infty}(\frac{x}{e^x})=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{e^x})=0\ (mit\ l'Hospital)$$