

Name:

Thema: Weiterführung der Differenzial- und Integralrechnung, Exponentialfunktion, gebrochenrationale Funktion

Lehrer: C. Schmitt

Bearbeitungszeit: 135 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner (**ohne Grafik; nicht programmierbar**), Formelsammlung

Beachte: a) Wie vereinbart muss der Rechenweg bei allen Aufgabenstellungen nachvollziehbar sein.

b) Zwei Formpunkte; insgesamt 70+2 Punkte

Aufgaben:

1) Es ist $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$

Untersuchen Sie die Funktion im Hinblick auf

- Symmetrie des Grafen
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$
- Gemeinsame Punkte von Graf und Koordinatenachsen
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f
- Skizzieren Sie den Grafen von f (*ordentlich mit Bleistift*)
- Notieren Sie bitte Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0 = 2$
(Die Parameter als Dezimale angeben; einfügen der Tangente in die Skizze als Option).

Zeigen Sie bitte u.a., dass gilt:

$$f'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{2e^{-x}(-1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^3}$$

Bitte das Ergebnis jeweils nicht „erzwingen“; auch hier müssen alle Schritte gut nachvollziehbar sein

(25 Punkte)

2) Berechnen Sie bitte jeweils die Ableitung mit der **Kettenregel**:

a) $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = 3 \cdot 5^{\sqrt{x}}$

(10 Punkte)

3) Es ist $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 - 6}$

Führen Sie bitte eine vollständige Funktionsuntersuchung nach dem vereinbarten Schema durch (*hinsichtlich des Grafen genügt die ordentliche Bleistift-Skizze*).

Zeigen Sie bitte u.a., dass gilt:

$$f'(x) = -\frac{x^4 - 13x^2 + 30}{(x^2 - 6)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2 + 18)}{(x^2 - 6)^3}$$

Bitte das Ergebnis jeweils nicht „erzwingen“;
auch hier müssen alle Schritte gut nachvollziehbar sein

(26 Punkte)

- 4) Von einem radioaktiven Präparat (4mg) gehen stündlich 5% verloren
- Bestimmen Sie die Zerfallsfunktion.
 - Berechnen Sie, wie viel mg des Stoffes nach einer Woche noch vorhanden sind
 - Berechnen Sie exakt, wann noch die Hälfte des Stoffes vorhanden ist

(4 Punkte)

5) $\int_{-1}^0 5e^{-2x} dx$

- Berechnen Sie die Stammfunktion
- Berechnen Sie das Integral.

(5 Punkte)
