

Name:

Thema: Weiterführung der Differenzial- und Integralrechnung, Kurvendiskussion
Exponentialfunktion und gebrochenrationale Funktion, Rotationsvolumen

Lehrer: C. Schmitt

Bearbeitungszeit: 135 Minuten (3 Unterrichtsstunden)

Hilfsmittel: Taschenrechner (**ohne Grafik; nicht programmierbar**),
Formelsammlung

Beachte: a) Wie vereinbart muss der Rechenweg bei allen Aufgabenstellungen
nachvollziehbar sein.
b) Schmierzettel werden nicht eingesammelt
c) Zwei Formpunkte; insgesamt 83+2 Punkte

Aufgaben:

1) Es ist
$$f(x) = \frac{-x^3 + 8x}{x^2 - 9}$$

Untersuchen Sie die Funktion im Hinblick auf

- Symmetrie des Grafen
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$
- Gemeinsame Punkte von Graf und Koordinatenachsen
- Polstellen mit VZW
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Notieren Sie bitte Definitionsbereich ID_f und Wertebereich IW_f
- Skizzieren** Sie den Grafen von f (*ordentlich mit Bleistift*)

Zeigen Sie bitte u.a., dass gilt:

$$f'(x) = \frac{-x^4 + 19x^2 - 72}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f''(x) = -2x \frac{(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$$

Bitte das Ergebnis jeweils nicht „erzwingen“;
alle Schritte müssen gut nachvollziehbar sein.

(30 Punkte)

2) Berechnen Sie bitte jeweils die Ableitung mit der **Kettenregel**:

a)
$$f(x) = \left(5 - \frac{1}{x}\right)^3$$

b)
$$f(x) = \sqrt{1 + (e^x)^2}$$

(6 Punkte)

3) Es ist $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$

Untersuchen Sie die Funktion im Hinblick auf

- Symmetrie des Grafen
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$
- Gemeinsame Punkte von Graf und Koordinatenachsen
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Diskutieren Sie das Monotonieverhalten von f
- Notieren Sie bitte Definitionsbereich ID_f und Wertebereich WW_f
- Zeichnen** Sie den Grafen
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0 = -2$ und zeichnen Sie die Tangente in Ihr Schaubild

Zeigen Sie bitte u.a., dass gilt:

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x(-1+e^x)}{(1+e^x)^3}$$

Bitte das Ergebnis jeweils nicht „erzwingen“; auch hier müssen alle Schritte gut nachvollziehbar sein.

(25 Punkte)

4)

Die vertikalen Lastbänder eines Heißluftballons werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x}{6} \sqrt{-x+30}$$

beschrieben, wobei die x -Achse der vertikalen Rotations-symmetrieachse des Ballons entspricht. Berechnen Sie das Volumen des Ballons (vom Brennerahmen im Ursprung bis Ballonspitze). (10 Punkte)

5)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Von $O(0|0)$ aus wird eine Tangente an den Grafen von f gelegt. Bestimmen Sie bitte den Berührungspunkt und die Tangentengleichung.

(12 Punkte)