## Übungsblatt Nr. 17

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fach: | ***Mathematik*** | Thema: | *Musteraufgabe Zentralabitur / Analysis* ***Logarithmusfunktion; Ortslinien; Integrationsmethoden; Rotationsvolumen; näherungsweise Lösung von Gleichungen*** |
| Lehrer: | ***C. Schmitt*** | Schuljahr: | ***2011 / 12*** |
| Erstellt am: | ***19.1.2012*** | Klasse/Kurs: | ***LK M 11*** |

*Musteraufgabe des hessischen Kultusministeriums für das Zentralabitur:*

---

Für jede reelle Zahl $t$ ist eine Funktionenschar $f_t(x)$ gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x}; \; x > 0$$

a) Weisen Sie nach, dass der Graph zu $f_t(x)$ Null-, Extrem- und Wendestellen besitzt. Untersuchen Sie auch das Verhalten für $x \to 0$ und $x \to +\infty$ und zeichen Sie den Graphen zu $f_2(x)$ für $0 < x \leqslant 5$ (wählen Sie 1 LE $\hat{=}$ 2 cm).

b) Erklären Sie, was in den drei Schritten im untenstehenden Kasten berechnet wird. Was genau beschreibt $y$ im 3. Schritt?

> **Bestimmung einer besonderen Kurve:**
> Für den zu $g_t(x) = 2x^4 + tx^3$; $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ gehörigen Graphen ist der Punkt $T_t\left(-\frac{3}{8}t \mid -\frac{27}{2048}t^4\right)$ Tiefpunkt.
>
> 1. $x = -\frac{3}{8}t$
> 2. $t = -\frac{8}{3}x$
> 3. $y = -\frac{27}{2048} \cdot \left(-\frac{8}{3}x\right)^4 = -\frac{2}{3}x^4$

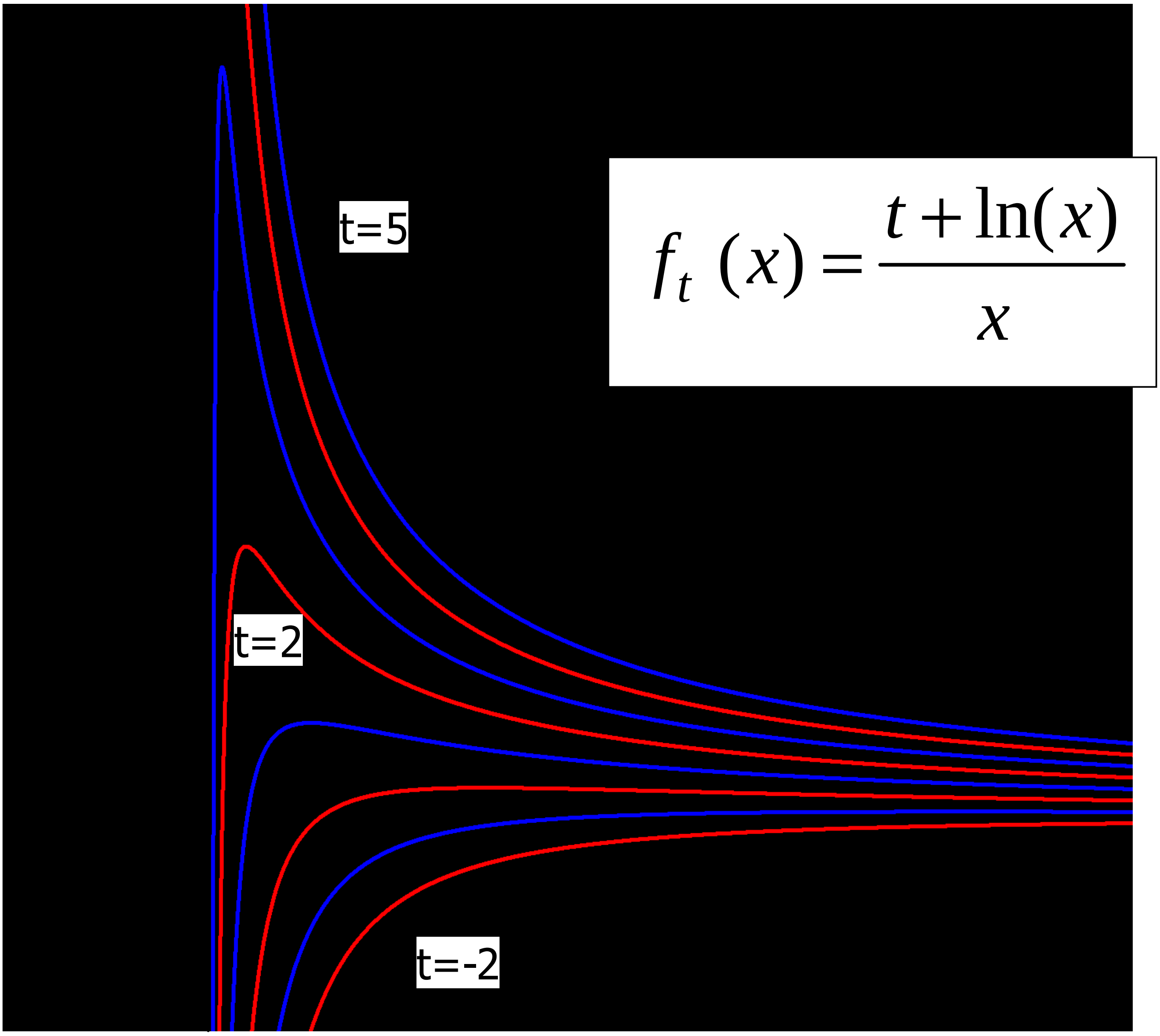
Übertragen Sie die Rechnung auf den Punkt $\left(e^{1-t} \mid e^{t-1}\right)$ der zu $f_t(x)$ gehörigen Kurvenschar und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Der zu $f_t(x)$ gehörige Graph, die $x$-Achse und die zur $y$-Achse parallele Gerade durch den Hochpunkt des Graphen von $f_t(x)$ umschließen eine endliche Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

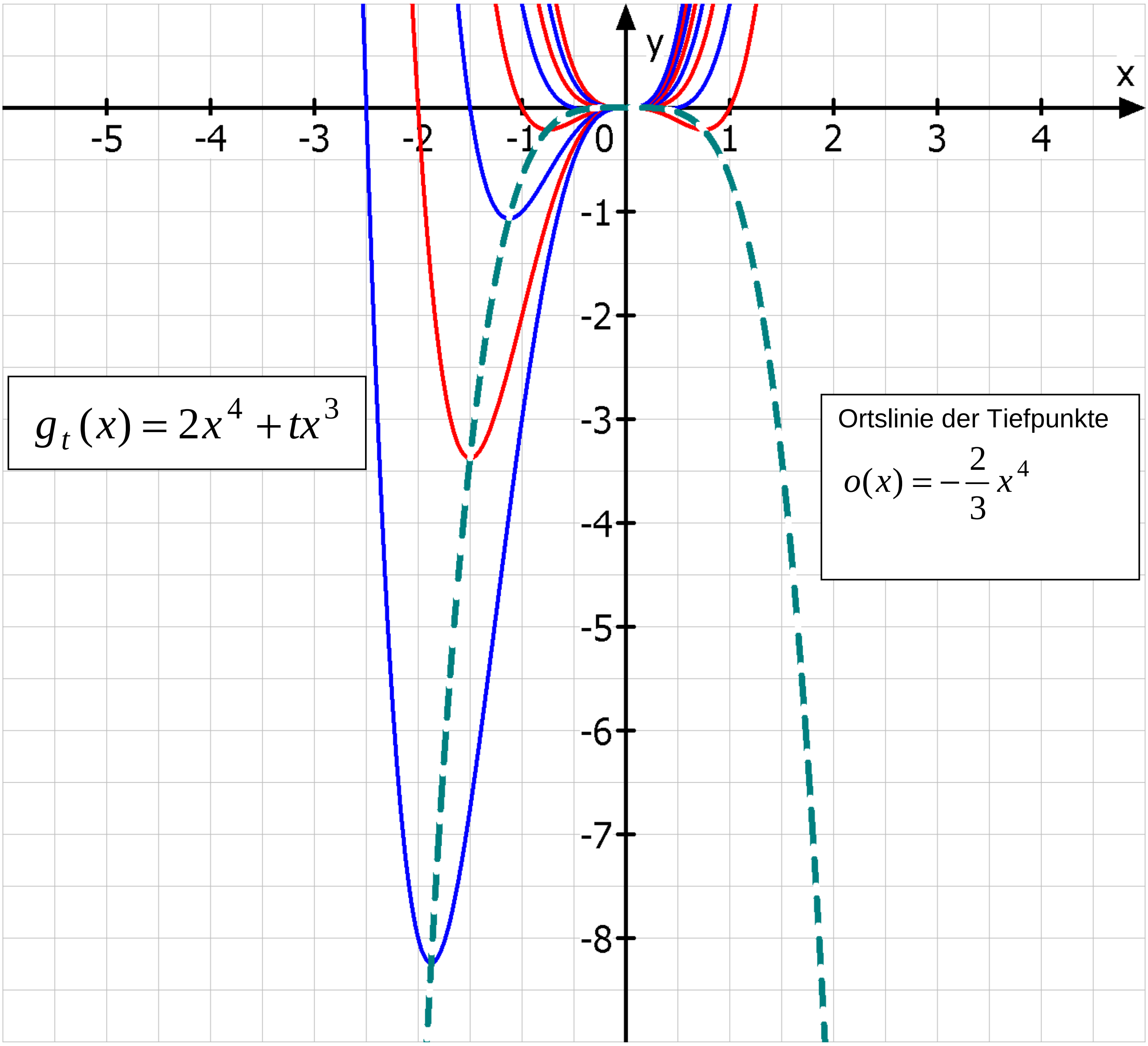
d) Lässt man den Graphen zu $f_2(x)$ (siehe a) im Intervall $\left[e^{-2}; h\right]$ mit $h > e^{-2}$ um die $x$-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, der einer Rotweinkaraffe ähnelt.
Man kann jetzt das Volumen der Karaffe in Abhängigkeit von $h$ (entspricht in etwa der genauen «Füllhöhe» $h - e^{-2} \approx h - 0.135$) berechnen. Möchte man zu einem gegebenen Volumen V dieser Karaffe $h$ bzw. die Füllhöhe bestimmen, so gelangt man nach einigen Umformungsschritten zu folgender Gleichung (mit $z = \ln(h)$):

$$z^2 + 6z + 10 = \left(\frac{-V}{\pi} + 14.78\right) \cdot e^z$$

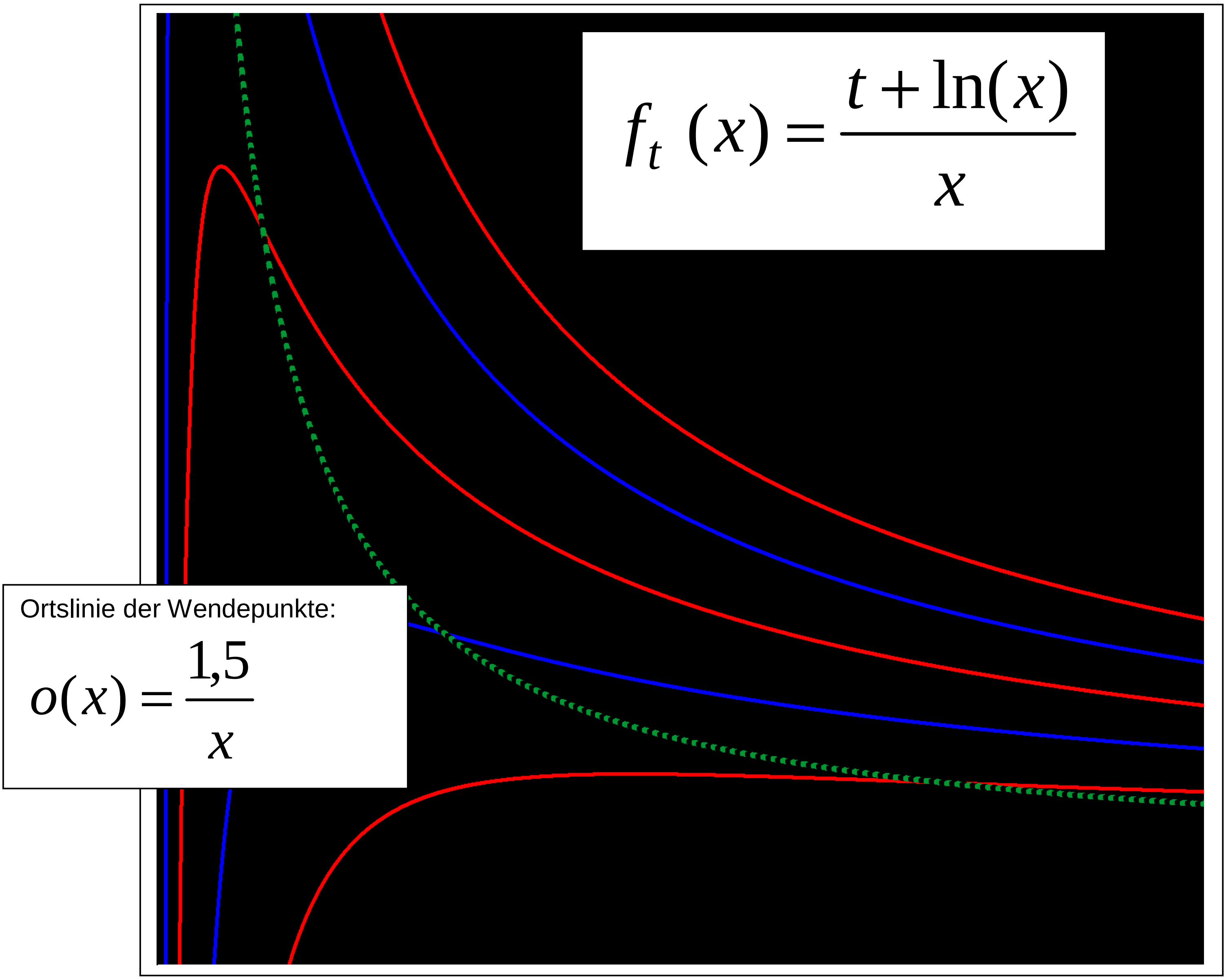
Diese Gleichung ist mit den herkömmlichen Mitteln algebraisch nicht lösbar. Erläutern Sie, wie man zumindest näherungsweise eine Lösung für $z$ bestimmen könnte. Begründen Sie, warum es nicht für jeden Wert von V eine Lösung geben kann und geben Sie diese Werte an.


t=5
$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x}$
t=2
t=-2

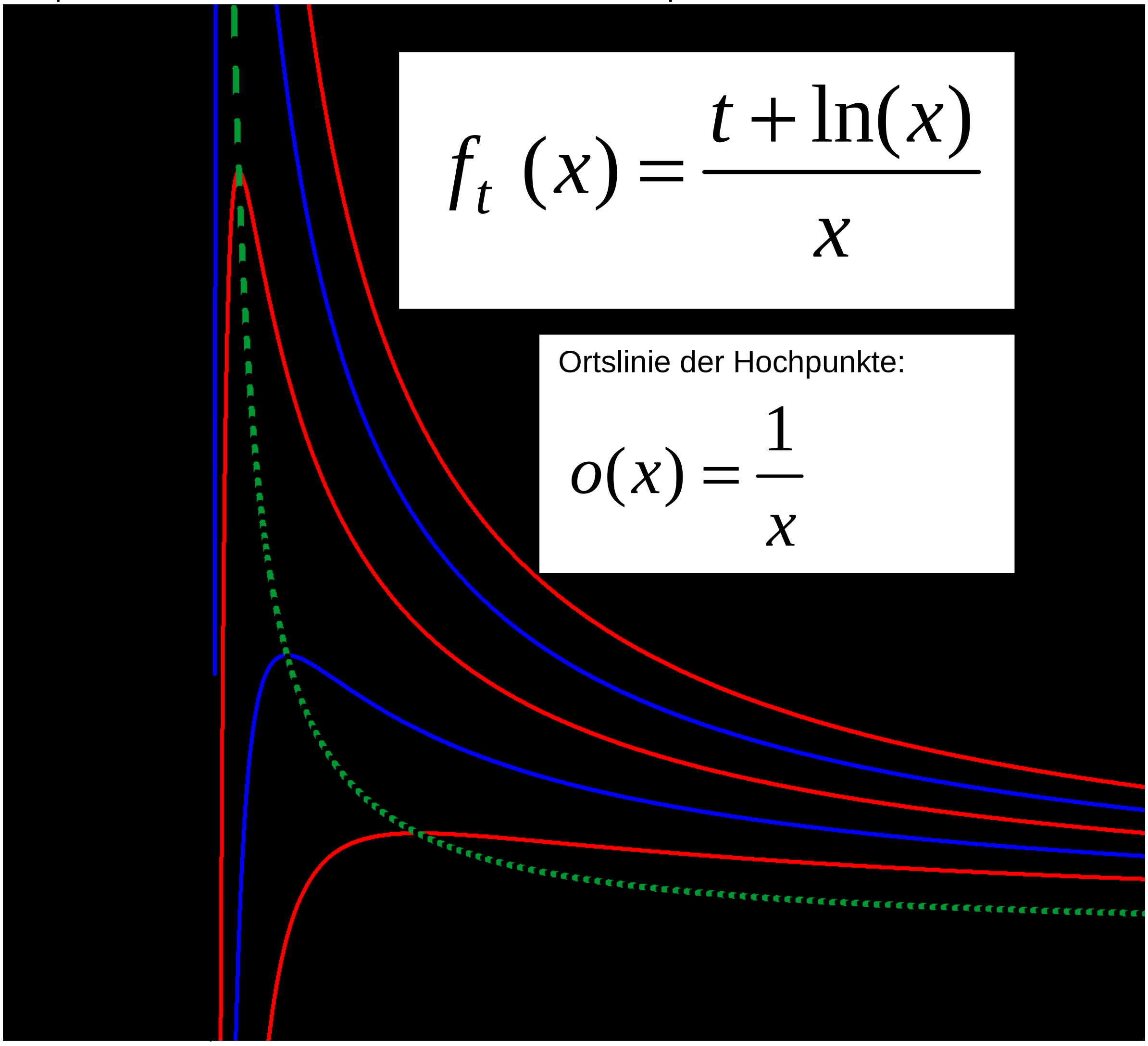
Graph der Schar von $g_t$ mit **Ortslinie** der Tiefpunkte (Kasten Aufgabe b))



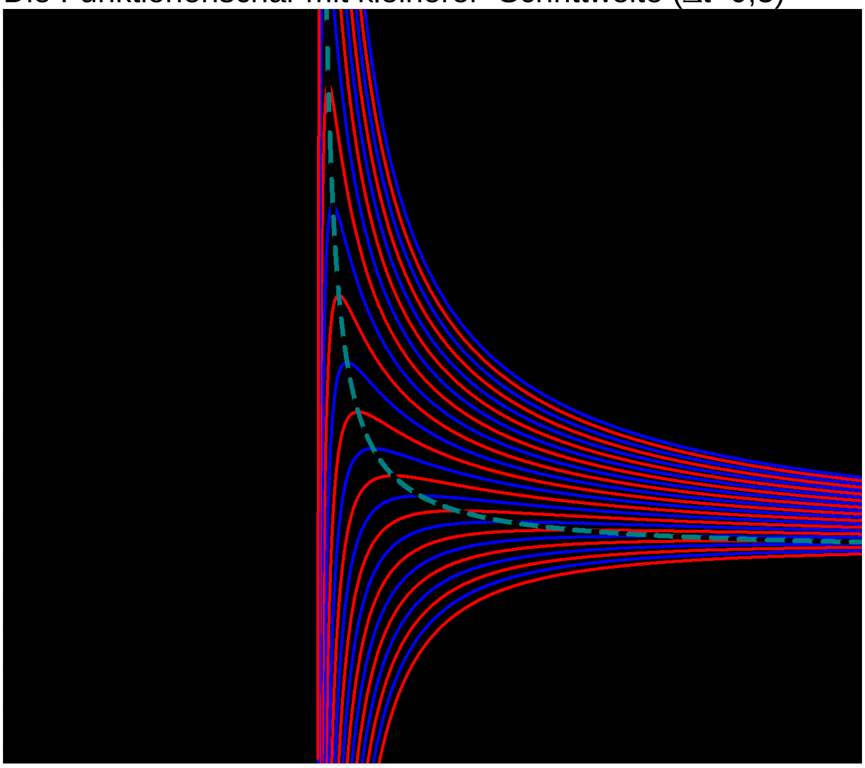
Graph der Schar von $f_t$ mit **Ortslinie** der Wendepunkte



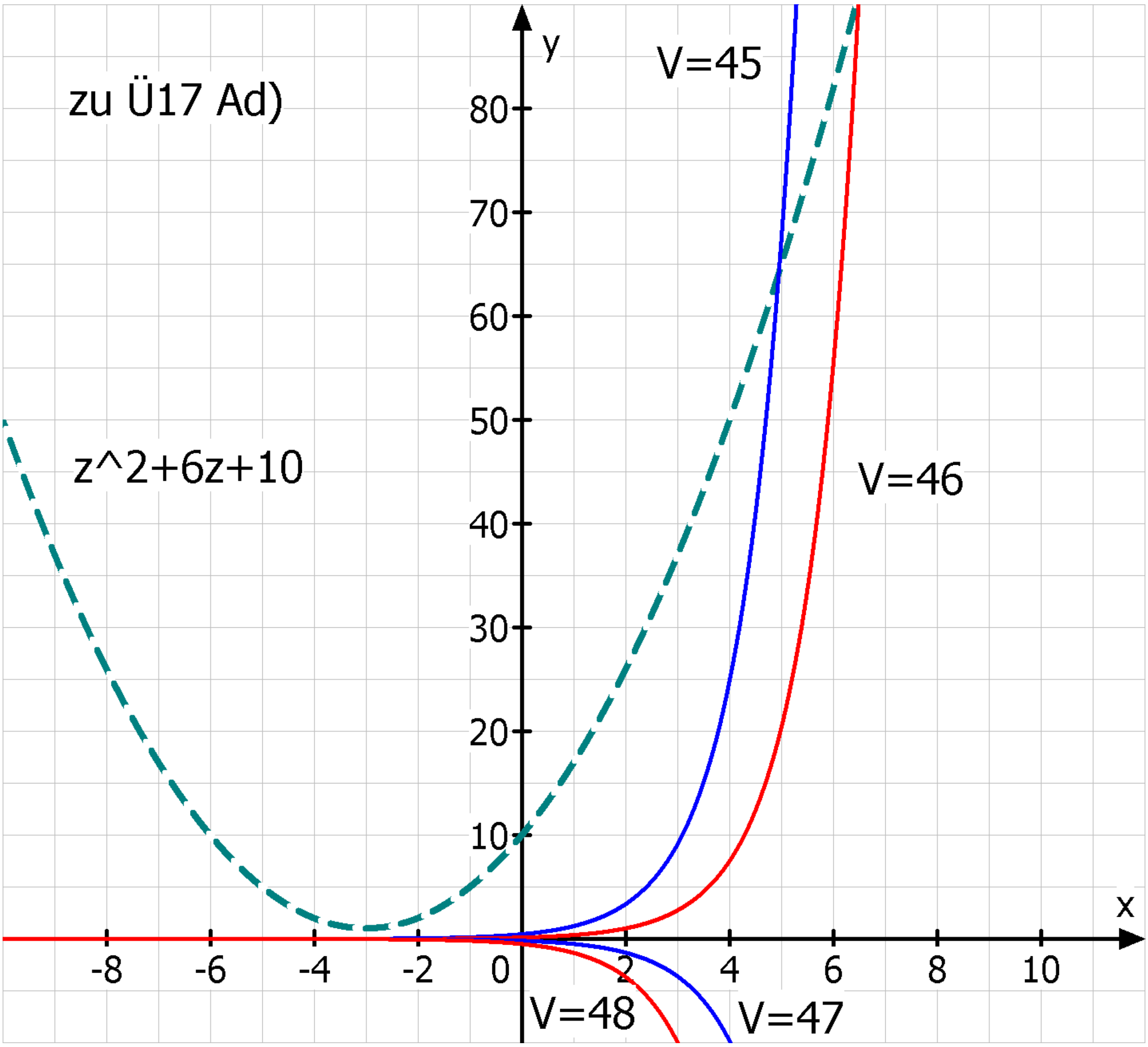
Graph der Schar von $f_t$ mit **Ortslinie** der Hochpunkte



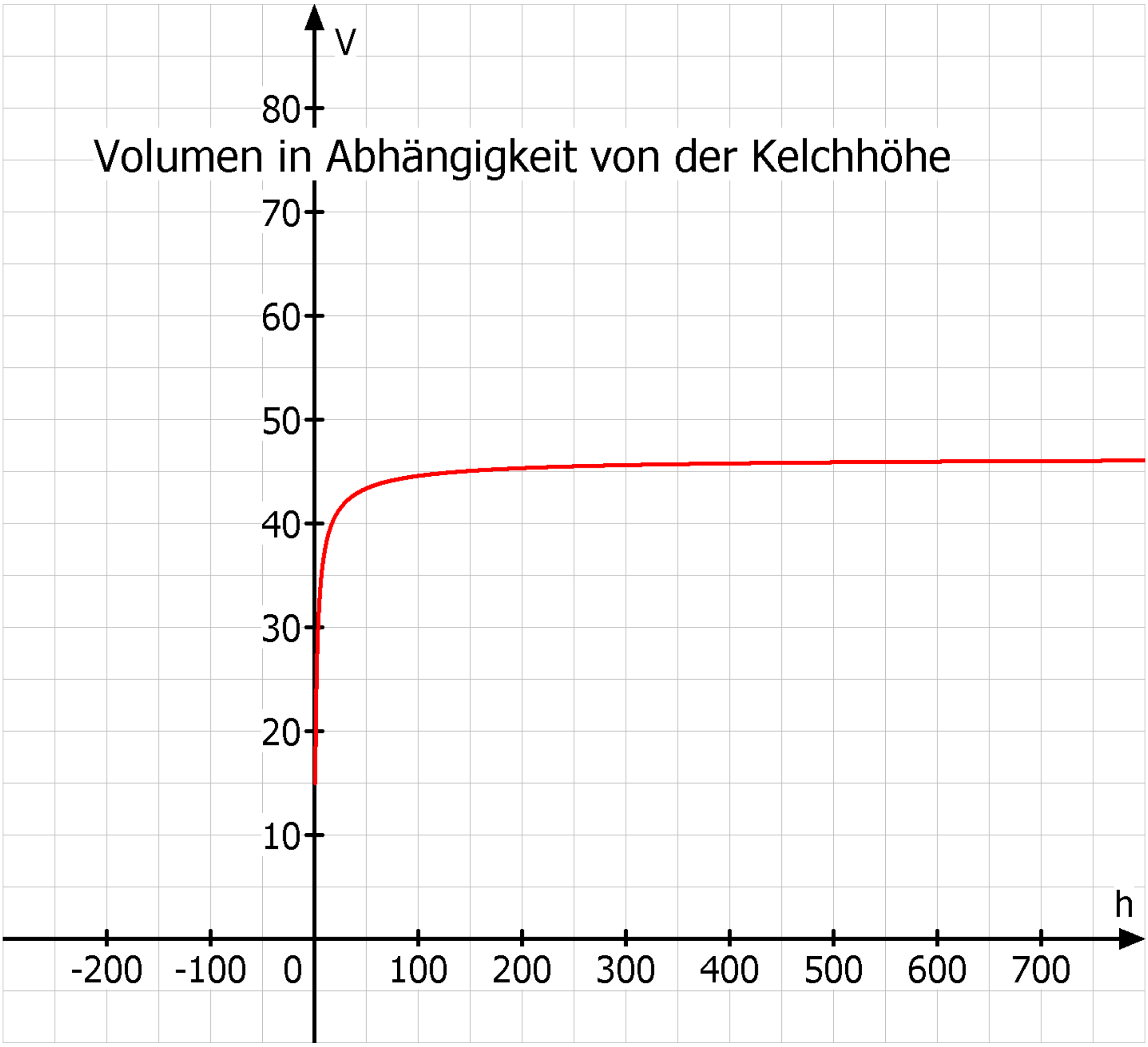

Die Funktionenschar mit kleinerer Schrittweite ($\Delta t = 0{,}3$)



zu Aufgabe 1d)



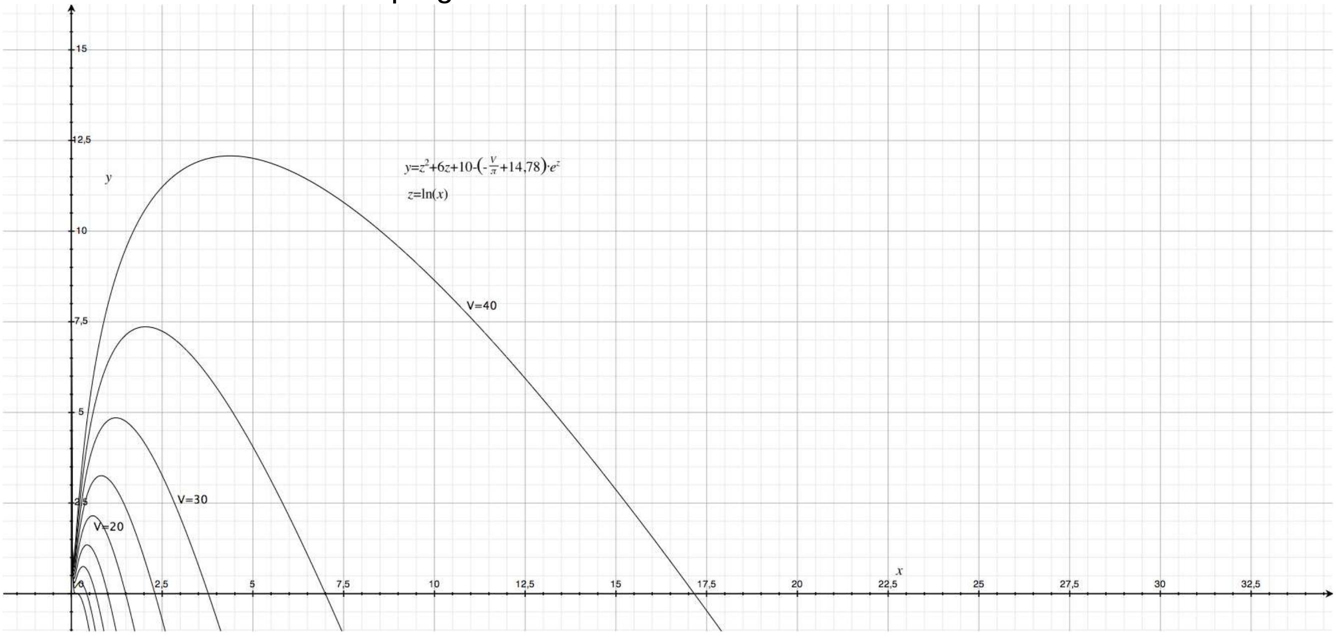
zu Aufgabe 1d)
Volumen in Abhängigkeit von der Kelchhöhe



Jonas Idee zur Lösung der Gleichung

$$y=(\ln(x))^2+6(\ln(x))+10-\left(-\frac{V}{\pi}+14{,}78\right)\cdot e^{\ln(x)}$$

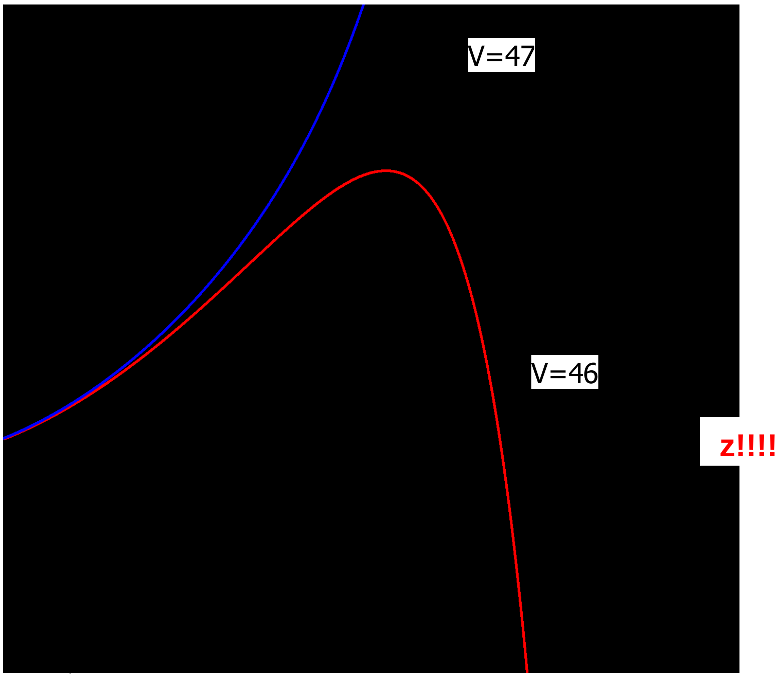
Zunächst hat er diesen Graph geschickt:




Es ging ja um die Frage, wann die beiden Seiten gleich sind, d.h. welche NS sich für die obige Funktion ergeben; diese Funktion hat er direkt nach x aufgetragen; also <u>keine</u> Substitution z=ln(x).

Auf der nächsten Seite wird dieser Ansatz auch mit Mathgraf umgesetzt:

# 1) indem er die Substitution ln(x)=z belässt




Wichtig: Auf der x-Achse ist z aufgetragen; (logarithmisch); NS z=6,5
d.h. 6,5=ln(x) → x=665,14=h
diese Höhe zu V=46 ist gerade noch möglich;
für V =47 findet sich keine Höhe mehr

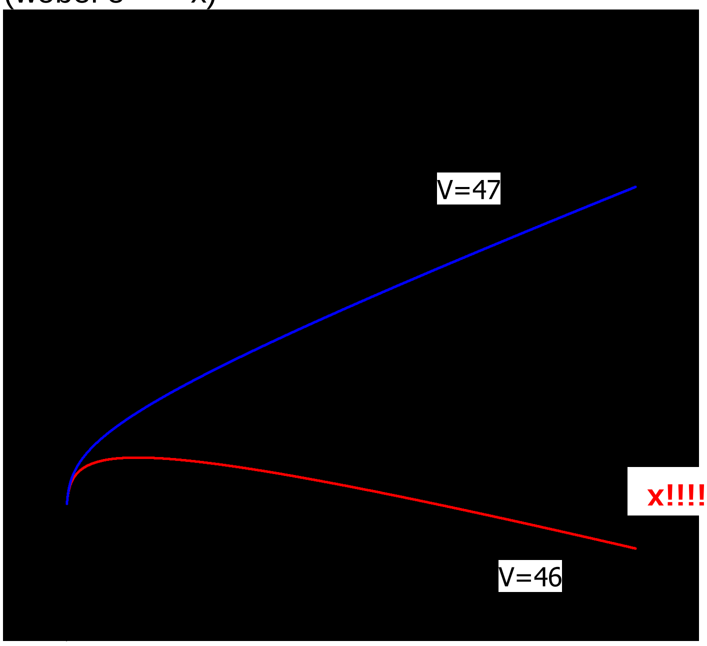
---

–

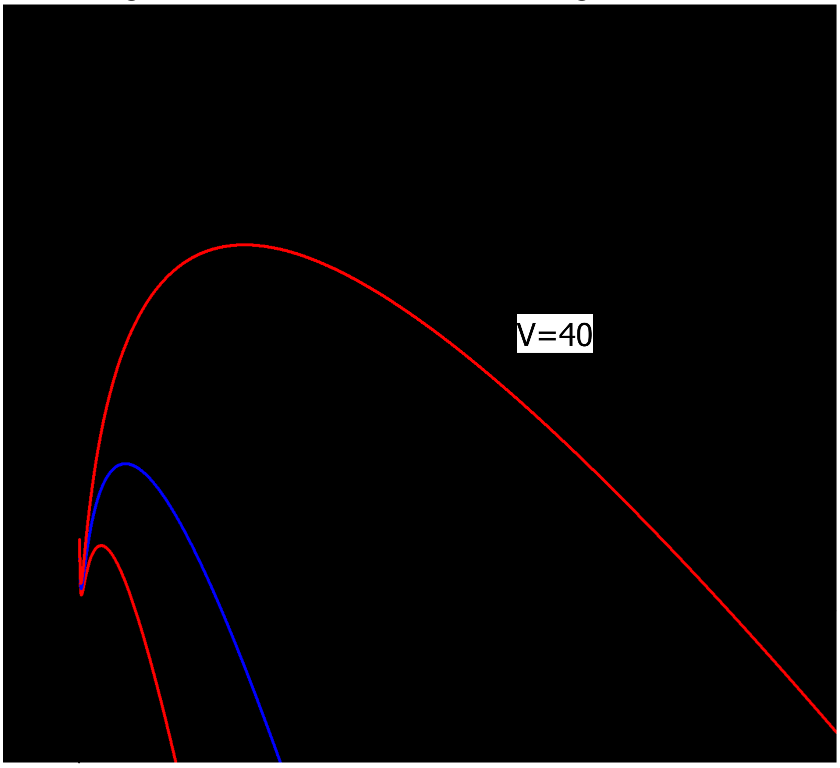
# 2) indem er x direkt aufträgt über

$$y=(\ln(x))^2+6(\ln(x))+10-\left(-\frac{V}{x}+14{,}78\right)\cdot e^{\ln(x)}$$

(wobei $e^{\ln(x)}=x$)




Die NS x=665 kann man auch hier grob ablesen zum Vergleich Jonas’ Mac-Bild mit Mathgraf und **x-auftragend**:




Beim Aufzoomen sieht man in der Tat, dass die Kurvenschar nicht durch den Ursprung geht, sondern $y \to \infty$ für $x \to 0$
Für V = 40 ergibt sich die NS x=17=h
ln(17) =2,8 in Übereinstimmung mit dem Bild in Ü17d)