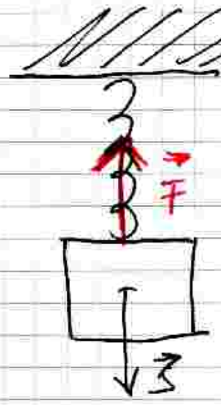
Beispiel für Anwendung v. Diffgleichungen aus der Physik: Harmonische Schwingung

Schraubenfederpendel



Hookesches Gesetz:

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{s}$$

Rückstellkraft wirkt entgegengesetzt zur Auslenkung

Als Pendel verstehen

$s(t)$

$v(t) = s'(t)$

$a(t) = s''(t) = v'(t)$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

also zu jeder Zeit gilt:

$$\boxed{-D \cdot s(t) = m \cdot a(t)}$$

oder

$$\boxed{s''(t) = -\frac{D \cdot s(t)}{m}}$$

Welche Funktion s löst diese Gleichung?

1. Versuch mit $s(t) = e^{k\cdot t}$

$$s(t) = e^{k\cdot t}$$

$$s'(t) = k\cdot e^{k\cdot t}$$

$$s''(t) = k^2 e^{k\cdot t}$$

Einsetzen:

$$k^2 e^{k\cdot t} = -\frac{D\cdot e^{kt}}{m}$$ also:

$$k^2 = -\frac{D}{m}$$ nicht lösbar.

---

2. Versuch mit $s(t) = \sin(kt)$

$$s'(t) = k\cdot \cos(k\cdot t)$$

$$s''(t) = -k^2\cdot \sin(k\cdot t)$$

Einsetzen:

$$-k^2\cdot \sin(k\cdot t) = -\frac{D\cdot \sin(kt)}{m}$$

$$k^2 = \frac{D}{m} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$s(0) = 0$ T ist Schwingungsdauer; also:

$$s(T) = \sin(k\cdot T) = 0 \Rightarrow k\cdot T = 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

Dies entspricht der Messung

also $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$ ist eine sinnvolle Lösung.