Die Logik - Werkzeug der modernen Philosophie (II)

Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik ist wesentlich leistungsfähiger als die Aussagenlogik, sie enthält schon fast alle logischen Hilfsmittel, die man zur Analyse wissenschaftlicher Begriffsbildungen und Beweise benötigt.

Während man in der Aussagenlogik die Bildung von komplexen Sätzen aus einfachen betrachtet,die Struktur der einfachen Sätze hingegen nicht analysiert, untersucht man in der Prädikatenlogik, wie solche einfachen, aussagenlogisch nicht zusammengesetzten Sätze gebildet sind.

Die einfachsten Sätze der Umgangssprache sind Sätze, die nur aus Subjekt und Prädikat bestehen (z.B. *Fritz schnarcht*. oder *Xaver ist ein Bayer*.). Diese grammatikalischen Begriffe sind für logische Zwecke zu ungenau. Hier verwenden wir als Subjekt nur **Namen für Individuen** (im Sinne von *Einzelgegenstände*). **Prädikate** sind dagegen das, was übrigbleibt, wenn man in einem einfachen Satz den oder die in ihm vorkommenden Namen wegstreicht.

Emil ist gestürzt.

Maria ist klug.

Erna liebt *Max*.

München liegt zwischen *Garmisch* und *Nürnberg*.

Wir können diesen Sätzen auch eine **logische Normalform** geben:

ist gestürzt (Emil)

ist klug (Maria)

liebt (Erna, Max)

liegt zwischen (München, Garmisch, Nürnberg)

Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt zu einer formalen, vom Inhalt der Sätze abstrahierenden logischen Form. Man benötigt dazu **Mitteilungszeichen für Prädikate** (F, G, H ...) und **Mitteilungszeichen für Namen** (a, b, c ...). Damit können wir die **logische Form einfacher Sätze** darstellen:

F(a) = "a hat die Eigenschaft F" bzw. "F trifft auf a zu" oder einfach "F von a"

F(a,b) = "a steht zu b in der Beziehung F"

F(a,b,c) = "a,b,c stehen zueinander in der Beziehung F"

Man kann nun solche einfachen Sätze durch Satzoperatoren zu neuen Sätzen verbinden, z.B.:

$\neg$ F(a), G(a,b)$\supset \neg$ H(a,b,c), usw.

Mit der Analyse der einfachen Sätze der Aussagenlogik in Namen und Prädikate verstärkt man die Ausdrucksfähigkeit der Aussagenlogik noch nicht wesentlich. Der entscheidende Schritt im Aufbau der Prädikatenlogik besteht in der **Einführung von prädikatenlogischen Operatoren**, die aus einstelligen Prädikaten Sätze erzeugen. Solche Ausdrücke sind z.B.: *alle, alles, sämtliche, jeder*. Diese Wörter drücken eine Generalisierung aus. Wir können z.B. aus dem Prädikat "ist rot" mit dem Wort "alles" den Satz "*Alles ist rot*" bilden.

Diesem Satz kann man auch die Form "*Für jedesDing gilt: es ist rot*" geben. Das Pronomen "es" ist dabei natürlich kein Name mehr, sondern bezieht sich auf den generalisierenden Ausdruck "jeder". Er wird daher durch eine **Variable** (x, y, z ...) ersetzt, wodurch sich die Formulierung "*Für jedesDing x gilt: x ist rot*" ergibt. Dabei ist x ein Element der Grundmenge aller Dinge (in einem Bereich).

Diesem Ausdruck können wir ebenfalls eine logische Form geben. Dazu brauchen wir ein Symbol, das für die **Generalisierung** steht, den sogenannten **Alloperator** (Λ , $\forall$, (x)):

> Aus "*Für jedes (Ding) x gilt: x ist rot*" wird Λ**xF(x).**

Den Ausdruck Λ**x** bezeichnen wird dabei als **Allquantor**.

Weitere Beispiele:
Alle Wale sind Säugetiere $\Rightarrow$ Wenn x ein Wal ist, dann ist x ein Säugetier $\Rightarrow$ $\Lambda x(F(x) \supset G(x))$
Kein Wal ist ein Fisch $\Rightarrow$ Wenn x ein Wal ist, dann ist x kein Fisch $\Rightarrow$ $\Lambda x(F(x) \supset \neg G(x))$

Als zweiten Ausdruck, mit dem sich aus einem einstelligen Prädikat ein Satz erzeugen läßt, betrachtet man in der Prädikatenlogik den Ausdruck *etwas* (oder: *ein, es gibt ein, einige, manche*):

> "Etwas ist rot" wird dabei gedeutet als: "*Es gibt (mindestens) ein Ding x, für das gilt: F(x)*"

Für die logische Form benötigen wir einen weiteren Operator, den sogenannten **Existenzoperator** (V,$\exists$), den Ausdruck Vx bezeichnen wir analog als **Existenzquantor**. Als logische Form des obigen Satzes ergibt sich dann: **Vx F(x)**

> Die beiden Quantoren sind wechselseitig definierbar: Λ**xF(x)** $\equiv \neg$ V**x**$\neg$ **F(x)**

Mit Hilfe des Existenz- und Alloperators können wir folgende, aus den aristotelischen Syllogismen bekannten Satzformen bilden:

Alle F sind G:	$\Lambda x(F(x) \supset G(x))$
Kein F ist ein G:	$\Lambda x(F(x) \supset \neg G(x))$
Einige F sind G:	$Vx(F(x) \wedge G(x))$
Einige F sind nicht G:	$Vx(F(x) \wedge \neg G(x))$

Die Prädikatenlogik bietet jedoch auch die Möglichkeit des **mehrfachen Quantifizierens**, was ihre Überlegenheit über die traditionelle Logik ausmacht:

Jeder liebt jeden	$\Lambda x \Lambda yG(x,y)$
Jeder liebt jemanden	$\Lambda xVyG(x,y)$

Jemand liebt jeden $\bigvee x \bigwedge y G(x,y)$

Jemand liebt jemanden $\bigvee x \bigvee y G(x,y)$

Semantik der Prädikatenlogik

Einer Interpretation der Prädikatenlogik müssen wir einen Bereich von Gegenständen, der mindestens ein Objekt enthalten soll, zugrunde legen. Die Gegenstandskonstanten (a,b,c ...) werden dann als **Namen** für Objekte dieses Gegenstandsbereichs und die Prädikatenkonstanten als Umfänge von Begriffen, die sich auf diese Objekte beziehen, gedeutet. Unter dem **Umfang** eines einstelligen Begriffs (einer Eigenschaft) versteht man die Menge aller Objekte, die diese Eigenschaft haben. Der Umfang des Begriffs Mensch ist also die Menge aller Menschen. Als Umfang einer n-stelligen Beziehung versteht man die Menge der Folgen von n Objekten, die zueinander in der Beziehung stehen. Der Umfang des Begriffs "kleiner als" für natürliche Zahlen ist die Menge aller Zahlenpaare x,y, für die gilt, daß x kleiner als y ist (z.B. (1,2), (2,3), (1,3) usw.).

Erweiterungen der Logik

Für mathematische Zwecke wird die Prädikatenlogik noch um einige weitere Aspekte erweitert, z.B. **Identität** (=), **Kennzeichnungen** (*dasjenige x, für das gilt F(x))* oder **Funktionsausdrücke** (f(x)).

Der nächste Schritt ist die sogenannte **Mengenlehre**, bei der der Mengenbegriff (*die Menge aller x für die gilt* F(x)) und der Elementbegriff (*a ist Element der Menge Σ).* Die Mengenlehre wird jedoch von vielen Autoren (z.B. Quine) nicht mehr zur Logik im engeren Sinn gerechnet, da darin der Bereich unserer natürlichen Intuition verlassen wird.

Philosophische Logiken

Philosophische Logiken bauen auf den Erkenntnissen der formalen Logik auf und versuchen die Verwendung bestimmter Begriffe, die in dem jeweiligen Gebiet von grundlegender Bedeutung sind, logisch zu rekonstruieren. Charakteristisch für diese Logiken ist, daß es häufig eine Vielzahl alternativer Lösungen gibt, daß meist neue Operatoren eingeführt werden und daß nicht selten Teile der formalen Logik modifiziert werden müssen.

Modallogik

Zu den ältesten Bemühungen um eine philosophische Logik, die bis auf Aristoteles zurückreichen, gehören die Versuche, eine Logik der Modalitäten zu entwickeln, d.h. die Bedeutung der Begriffe **'notwendig'**, **'möglich'** und **'unmöglich'** zu klären.

- *Welcher logische Zusammenhang besteht zwischen den Ausdrücken 'notwendig', 'möglich' und 'unmöglich'?*
- *Wann sind die Sätze "Es ist notwendig, daß Napoleon ein Mann war.(**N**p)" bzw. "Es ist möglich, daß Hitler Kunstmaler geworden wäre. (**M**q)" wahr?*

Die übliche Semantik der Aussagenlogik läßt sich hier nicht anwenden, sondern es ist eine sogenannte **Semantik möglicher Welten** notwendig. Mögliche Welten bedeutet hier: 'logisch mögliche Welten'.

- *Wie sind logisch mögliche Welten zu denken?*

-

Deontik

Die deontische Logik oder kurz: Deontik, gehört zu den interessantesten Gebieten der philosophischen Logik und ist vorallem für die Ethik, die Rechtsphilosophie und die Staatsphilosophie von Bedeutung. Ganz allgemein befaßt sich die Deontik mit den **logischen Beziehungen zwischen normativen Sätzen**, d.h. Sätzen, die auf den Begriffen der **Verpflichtung**, des **Erlaubtseins** und des **Verbotenseins** basieren.

- *Welcher logische Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen 'Verpflichtung', 'Erlaubtsein' und 'Verbot'?*
- *Welche Art von Sätzen sind in Formeln der deontischen Logik einzusetzen (z.B.* ***erlaubt****-p,* ***verboten****-p)?*
- *In älteren Systemen der deontischen Logik lassen sich die folgende Schlüsse beweisen:*

  verpflichtend-p → **verpflichtend**-(p oder q)

  erlaubt-q → **erlaubt**-(p oder q)

  Finde Beispiele, die zeigen, daß sie unserer natürlichen Intuition widersprechen.
  Was könnte der Grund für diese Paradoxien sein?

-

Epistemische Logik

Die epistemische Logik ist die **Logik des Glaubens und Wissens**. Gerade hier gehen die Auffassungen sehr weit auseinander, so daß sich kaum ein einheitlicher Ansatz ausmachen läßt. Es handelt sich weitgehend um Spezialuntersuchungen, die die Bedeutung der Begriffe 'Glauben' und 'Wissen' zu klären versuchen. Nichtsdestotrotz gehört die epistemische Logik zu den wichtigsten philosophischen Logiken.

- *Welches Problem ergibt sich hinsichtlich der Wahrheit folgender Sätze:*

  Franz Josef Strauß war bayerischer Ministerpräsident im Jahre 1985.

  Ich glaube*, daß Franz Josef Strauß bayerischer Ministerpräsident im Jahre 1985 war.*

  [Hinweis: Man ersetze den Namen *'Franz Josef Strauß'* durch den synonymen Ausduck *'der Bundesverteidigungsminister im Jahre 1960'*]

- Was meine ich, wenn ich sage, daß **ich weiß, daß (**bzw**.** daß **ich glaube, daß)** "*Franz Josef Strauß bayerischer Ministerpräsident im Jahre 1985 war*"?

Wenn wir von 'Glauben' reden, dann werden wir sehr schnell bei Graden des Glaubens angelangt sein. So ergibt sich hier ein natürlicher Übergang zur **Logik der Wahrscheinlichkeiten**.

-

Entscheidungslogik / Spieltheorie

Viele Autoren sind der Meinung, man könne **'Glauben'** und **'Wissen'** nicht vom **Handeln** des Menschen trennen. Indem man Zusammenhänge zwischen Handlungen, Handlungsfolgen und Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Folgen herstellt, erhält man eine **Theorie der rationalen (vernünftigen) Entscheidung**. Diese Disziplin ist insbesondere im Bereich der Wirtschaftswissenschaften von Bedeutung.
Während die Entscheidungstheorie das Handeln einzelner Individuen beschreibt ist die Spieltheorie eine **Theorie der kollektiven Rationalität**, d.h. sie beschreibt wie zwei oder mehrere Personen, deren Interessen sich teilweise oder ganz widersprechen, vernünftigerweise ihre Handlungen aufeinander abstimmen. Die Spieltheorie wird zur Analyse spielähnlicher Situationen im politischen Leben, im Geschäftsleben oder in internationalen Konflikten angewendet.

Mehrwertige Logiken

Diese Logiken haben gemeinsam die **Einführung zusätzlicher Wahrheitswerte** neben 'wahr' und 'falsch'. So erweist es sich für die Analyse des folgenden Satzes als günstig, den zusätzlichen Wert 'unbestimmt' einzuführen, um der umgangssprachlichen Bedeutung Rechnung zu tragen:

> *"Max hängt sehr an seiner Briefmarkensammlung."*

Der wichtigste Typ einer mehrwertigen Logik ist die sogenannte **Fuzzy-Logik**. Hier wird den entsprechenden Sätzen ein Wahrheitswert zwischen 1 (wahr) und 0 (falsch) zugeordnet. So kann man Sätze als *'wahrscheinlich wahr'*, *'möglicherweise falsch'* etc. bezeichnen. Diese Logik ist von großer Bedeutung bei der Computersteuerung von technischen Geräten, insbesondere dann, wenn gewisse Ungenauigkeiten nicht vermieden werden können bzw. die Maschine 'Entscheidungen treffen' muß.

-

Literatur

- Willard van Orman Quine: *Grundzüge der Logik*
- Franz von Kutschera/Alfred Breitkopf: *Einführung in die moderne Logik*