Folgen und Vollständige Induktion

1. a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Für die Summenfolge s_n (geometrische Reihe) mit $0 < q < 1$ gilt:

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

b) Berechne den Grenzwert der Folge s_n für $n \to \infty$

Hinweis: Diese Formel wird in den nächsten Aufgaben benötigt!

2. Eine Stahlkugel fällt senkrecht aus einer Höhe von 1 m und beginnt zu springen. Beim 1. Mal springt sie 80 cm hoch, beim 2. Mal 64 cm, beim 3. Mal 51, 2 cm, beim 4. Mal 40,96 cm usw. Welchen Weg *s* legt sie zurück, bis sie in Ruhe bleibt?

3. Zur Unkrautvernichtung werden auf einem Feld wöchentlich 30 kg eines Herbizides gesprüht. Pro Woche baut sich davon etwa 30% ab.

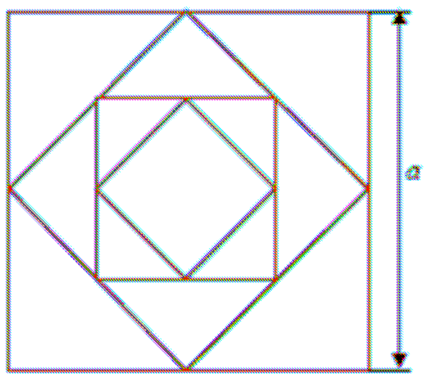
a) Formulieren Sie eine Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge, die diesen Prozess beschreibt!

b) Wie viel Kilogramm des Herbizides sind nach 8 Wochen auf dem Feld?

c) Wie lange nach darf das Feld nach der 8-wöchigen Herbizidbehandlung nicht gesprüht werden, damit sich die Herbizidmasse auf 1 kg abgebaut hat?

d) Wie viel Kilogramm des Herbizides sind auf dem Feld, wenn man das Unkraut-vernichtungsmittel über eine unbegrenzte Zeit sprühen würde?

4. In einem Quadrat mit der Seitenlänge *a* liegt ein zweites, so dass dessen Eckpunkte in den Mittelpunkten der Seiten des ersten Quadrates liegen. Dem zweiten Quadrat ist in der gleichen Weise ein drittes, dem dritten ein viertes usw. einbeschrieben.



Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte und die Summe der Umfänge aller Quadrate!

Grenzwerte von Funktionen

1. Für das Verhalten einer rationalen Funktion kommt es auf den Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms an. Untersuchen Sie für die folgenden drei Funktionen das Verhalten im positiven Unendlichen und leiten Sie passende allgemeine Regeln ab!

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2-1} \qquad f_3(x) = \frac{x^3+2}{x+1}$$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen. Geben Sie auch die Sätze und Regeln inkl. der notwendigen Voraussetzungen an, die Sie verwenden.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-8x+16}{x-4} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}(\sin x-\frac{\cos x}{x}) \qquad \lim_{x\to 0}(\sin x-\frac{\cos x}{x})$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) \qquad \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{e^x-1}) \qquad \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x+\cos x-1})$$

$$\lim_{x\to \infty}(\frac{x}{e^x}) \qquad \lim_{x\to \infty}(\frac{x^2}{e^x}) \qquad \lim_{x\to \infty}(\frac{x^n}{e^x}) \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan(3x)}{\tan x}$$

Extremwertaufgaben

Elemente der Mathematik, Leistungskurs Analysis:

S. 97: Aufg. 12; Aufg. 16; Aufg. 17;

S. 95: Aufg. 2;

Stetigkeit

1. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und nennen Sie die Stellen bzw. Intervalle, an denen die jeweilige Funktion nichgt stetig bzw. stetig ist.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & mit \quad x \in R/\{0\} \\ 2 & mit \quad x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} -x^{-1} & mit \quad -\infty < x < 0 \\ x & mit \quad x \geq 0 \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} 1 & mit \quad x > 0 \\ 0 & mit \quad x = 0 \\ -1 & mit \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Ergänzen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ so, dass sie über ganz R stetig ist.

Differenzierbarkeit

1. Untersuchen sie die Funktion f(x) = |x-2| an der Stelle x_0=2 auf Differenzierbarkeit!

2. Geben Sie eine Funktion an, die über ganz R stetig ist, aber an mindestens einer Stelle nicht differenzierbar!

Zum Knobeln: Kann es auch eine Funktion geben, die überall differenzierbar ist, aber an mindestens einer Stelle nicht stetig?

3. Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen mittels Differenzialquotient:

$f_1(x) = x^2 + x$ $\qquad$ $f_2(x) = 6x^3$

4. Beweisen Sie die Summenregel für die Ableitung!