

3. Abituraufgabe

Exponentialfunktion

2.)

$$f_k(x) = \frac{e^{kx}}{(e^{kx} + 1)^2}$$

$$g(x) = e^{kx} + 1$$

$$g'(x) = e^{kx} \cdot k$$

$$h(t) = \frac{1}{t^2}$$

$$h(t) = -1/t$$

$$\begin{aligned} \int f_k(x) dx &= \frac{1}{k} \int h(g(x)) \cdot g'(x) dx \\ &= \frac{1}{k} \cdot H(g(x)) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{-1}{e^{kx} + 1} \right) + C \\ &= \frac{-1}{k(e^{kx} + 1)} + C \\ &= F_k(x) \end{aligned}$$

3.) Bsp: $f(x) = x^2$ achsensymmetrisch
 $f'(x) = 2x$ punktsymmetrisch

Vor: $f(-x) = f(x)$

Beh: $f'(-x) = -f'(x)$

differentialquotient
gesucht

Bew:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$= -f'(x)$$

q.e.d

4.1) • $\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-0,5x^2}$

• $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx$

$$\Rightarrow \int_0^{0,5} \varphi(x) dx = \Phi(0,5) - \Phi(0)$$

$$= 0,6915 - 0,5$$

$$= 0,1915$$

• $g(x) = f_{1,5}(x) \cdot a$

$$\int_0^{0,5} g(x) dx \stackrel{!}{=} \int_0^{0,5} \varphi(x) dx = 0,1915 \quad (\Rightarrow \text{Forderung})$$

$$\left[\frac{-a}{1,5(e^{1,5x} + 1)} \right]_0^{0,5} = 0,1915$$

$$- \frac{a}{1,5} \left[\frac{1}{e^{1,5x} + 1} \right]_0^{0,5} = 0,1915$$

$$- \frac{a}{1,5} \left(\frac{1}{e^{0,75} + 1} - \frac{1}{2} \right) = 0,1915$$

$$- \frac{a}{1,5} (-0,19) = 0,1915$$

$a \approx 1,6$

$$g(x) = \frac{1,6 \cdot e^{1,5x}}{(e^{1,5x} + 1)^2}$$

→ Näherungsfunktion für φ

Vorteil: keine Tabelle notwendig!

1. Quadrant: von 0 - ∞

$$A = \int_0^{\infty} g(x) dx$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z g(x) dx$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{-1,6}{1,5(e^{1,5x} + 1)} \right]_0^z$$

$$= \frac{-1,6}{1,5} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{1,5x} + 1} \right]_0^z$$

$$= \frac{-1,6}{1,5} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{1,5z} + 1} - \frac{1}{2} \right)$$

\downarrow 0 \downarrow $-\frac{1}{2}$

$$= \frac{-1,6}{1,5} \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= 0,53$$

zum Vergleich:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 - 0,5 = 0,5 //$$