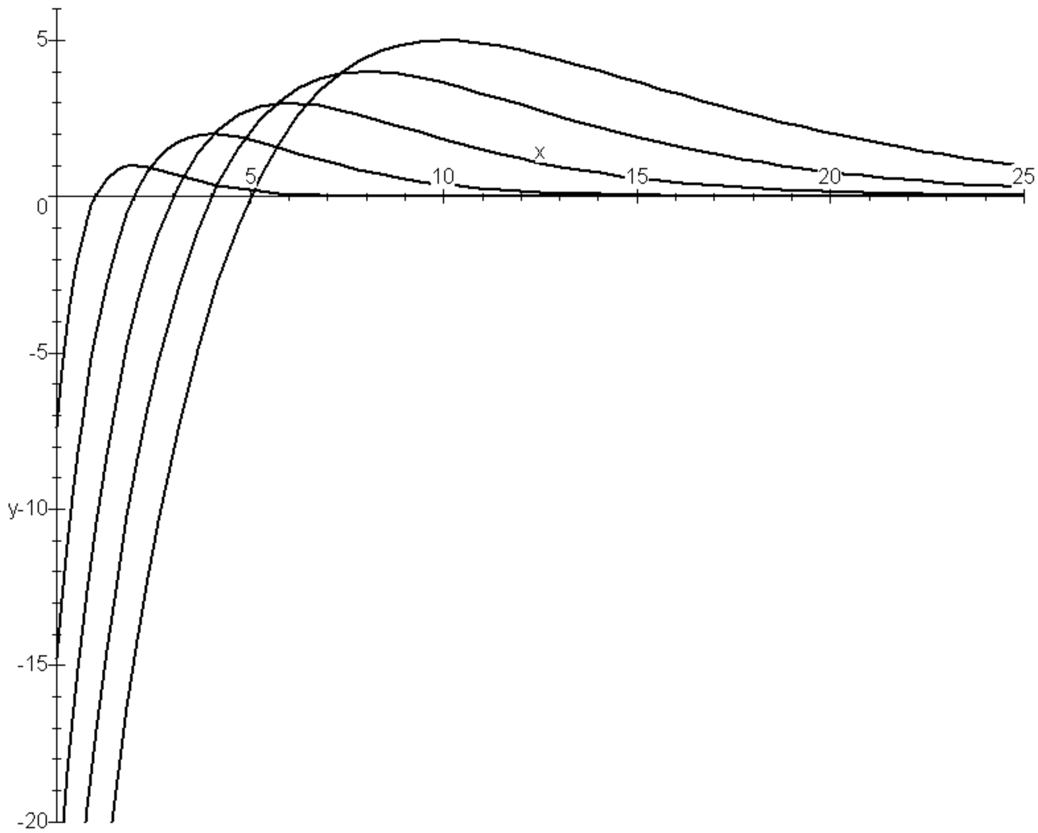
Funktionsschar (Birmes)

a) Gegeben sind die Schaubilder einer Funktionenschar f_t mit $D_f = I\!R$.
Den Schaubildern kann man einige Eigenschaften der Funktionenschar entnehmen. Geben Sie die erkannten Eigenschaften plausibel an.



b) Eine Funktionenschar h_a sei gegeben durch $h_a(x)=(x-a)\cdot e^{(2-\frac{x}{a})}$ mit a $IR^{+¿}$.

Begründen Sie, welche Untersuchungen sinnvoll erscheinen, um Kenntnis über das Verhalten der gesamten Funktionenschar zu bekommen. Führen Sie die Untersuchungen soweit aus, dass für a = 2 im Intervall [0; 10] der Graph skizziert werden kann und skizzieren Sie diesen.

Lösung Funktionsschar:

a) Da nicht erwartet werden kann, dass alle Eigenschaften entdeckt werden, muss es genügen, wenn einige markante und vielleicht ein oder zwei weitere Eigenschaften genannt werden. Die fettgedruckten Eigenschaften und zwei weitere aus der Liste könnten (sinngemäß formuliert) erwartet werden.

1. Die Nullstellen der Funktionenschar liegen bei 1, 2, 3, 4, 5, ..., n. Aus der Regelmäßigkeit der ersten 5 Nullstellen wird dies vermutet.
2. Die positive x-Achse ist Asymptote der Funktionenschar.
3. Die Ortskurve der Hochpunkte ist eine Gerade
4. Die Ortskurve der Wendepunkte ist eine Gerade
5. Die Wendetangtenten sind parallel.
6. Die Schaubilder schneiden die x-Achse unter dem gleichen Winkel.

b) Die Schaubilder der Funktionenschar haben an der Stelle x = a Nullstellen. Dies geht offensichtlich aus dem Term (x – a) hervor, während der zweite Term stets größer null ist. Links der Nullstelle sind die Funktionswerte negativ, rechts davon positiv.

y-Achsenabschnitt: S (0 / -ae²)

Der zweite Faktor ist als Exponentialfunktion dominant und nimmt mit wachsendem x für jedes a ab und strebt *schnell* gegen null. Für x <a wird die Exponentialfunktion groß und strebt damit wegen des Faktors (x-a) gegen minus Unendlich. Damit sollte jede Kurve der Schar zusätzlich einen Hoch- und einen Wendepunkt haben. Das ist zu bestätigen. Es ergibt sich:

Extremstelle:

Notwendige Bedingung: $h'_a(x)=0 \Leftrightarrow x_E=2\mathrm{a}$

Hinreichende Bedingung: $h''_a(x)=-\frac{1}{a}<0 \Rightarrow Max \Rightarrow HP(2\mathrm{a}/a)$

Wendestelle:

Notwendige Bedingung: $h''_a(x)=0 \Leftrightarrow x_W=3\mathrm{a}$

Hinreichende Bedingung: $h'''_a(x)=\frac{1}{a^2e}>0 \Rightarrow WP(3\mathrm{a}/\frac{2\mathrm{a}}{e})$

Das Schaubild (Skizze) entspricht einer Kurve aus der Schar in Teilaufgabe a).

Für a=2: S (0 / -2e²), N (2 / 0), HP (4 / 2), WP (6 / 4/e)