Fach:	***Mathematik***	Themen:	***Analysis / Abitur***
Unterricht vom:	***08.02.-08.03.10***		***Lösungsvorschläge für Ü18***
abgeschlossen am:	***22.3.10***	Protokollant:	***Johannes Reusch***
Lehrer:	***C. Schmitt***	Jgst. / Kurs:	***Leistungskurs 12***

Bitte kritisch lesen und Fehler rückmelden; meine Kommentare von damals sind grün; C. Schmitt; 30.1.2012

Aufgabe 1

Achsensymmetrie

$f_k(x) = \frac{e^{kx}}{(e^{kx}+1)^2} = \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+2e^{kx}+1}$

mit e^{2kx} erweitern

$f_k(-x) = \frac{e^{-kx}}{e^{-2kx}+2e^{kx}+1} = \frac{e^{kx}}{e^0+2e^{kx}+e^{2kx}}$

$= \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+2e^{kx}+1} = f_k(x)$

$k \neq 0$

d.h.

$f_0(x) = 0{,}25$ also die waagerechte Tangente im HP des Graphen.

Zur Bestimmung des HPs $f_k(x)$ ableiten:

$f_k(x) = \frac{e^{kx}}{(e^{kx}+1)^2}$

$z(x) = (e^{kx}+1)^2$

$z'(x) = 2(e^{kx}+1) \cdot ke^{kx}$

Ableiten durch Quotienten- und Kettenregel.

<u>Anwendung der Quotientenregel</u>:

$f'_k(x) = \frac{ke^{kx} \cdot (e^{kx}+1)^2 - 2(e^{kx}+1) \cdot ke^{kx} \cdot e^{kx}}{(e^{kx}+1)^3}$

f´$_k$(x)= $\frac{ke^{kx}\cdot(e^{kx}+1)\quad -2\cdot ke^{kx}\cdot e^{kx}}{(e^{kx}+1)^3}$

f´$_k$(x) $\frac{ke^{kx}(1-(e^{kx})}{(e^{kx}+1)^3}$=

Verwendung d 1. Ableitung zur Berechnung der Extrema.

f'$_k$(x)=0

Eine Klammer zuviel imZähler

0= $\frac{ke^{kx}(1-(e^{kx})}{(e^{kx}+1)^3}$ (der Zähler muss 0 sein)

0=$ke^{kx}(1-(e^{kx})$

1=e^{kx} x=0 (dies ist die einzige Nullstelle)

Verhalten für x-> ±∞

4 Möglichkeiten

1. x-> +∞ und k>0
2. x-> +∞ und k<0
3. x-> - ∞ und k>0
4. x-> - ∞ und k<0

1.

f$_k$(x)=$\frac{e^{kx}}{(e^{kx}+1)^2}$

Ausmultiplizieren und mit e^{kx} kürzen.

f$_k$(x)=$\frac{1}{e^{kx}+e^{-kx}+2}$ => f(x) -> 0

$e^{kx} + e^{-kx}$ streben jeweils gegen ∞ im Positiven (e^y ist niemals negativ). Somit nähert sich der Nenner der ∞ an; f$_k$(x) strebt somit gegen 0.
Hierbei ist es egal ob es negativ oder positiv ist da die e-Funktion immer positiv ist. Somit strebt der wert immer gegen 0 und der Nenner wird immer +∞

2.

f$_k$(x)=$\frac{1}{e^{kx}+e^{-kx}+2}$ => f(x) -> 0

Algebra jetzt ok....

Hier fehlt:
Wenn e^{kx} gegen ∞ strebt, was ist dann mit e^{-kx} ????

3.

f$_k$(x)=$\frac{1}{e^{kx}+e^{-kx}+2}$ =>f(x) -> 0

4.

$f_k(x)=\frac{1}{e^{kx}+e^{-kx}+2}$ => f(x) -> 0

⇨ in allen 4 Fällen geht $f_k(x)\rightarrow 0$, da der Nenner immer gegen ∞ strebt. (Wenn man 1 durch dies teilt nähert es sich der 0 an.)

Der Grenzwert ist also 0.

Aufgabe 2

Bilden der Stammfunktion:

$f_k(x)=\frac{e^{kx}}{(e^{kx}+1)^2}$

Bestimmung der Stammfunktion durch Substitution.

$g'(x)=ke^{kx}$ $g(x)=e^{kx}+1$

$h'(g(x))=\frac{1}{k(e^{kx}+1)^2}$

Kommentar; warum k im Nenner???

$g(x)=t$

$h'(t)=\frac{1}{k(t)^2}$ => $h(t)=-\frac{1}{kt}$

$F_k(x)=h(g(x))=-\frac{1}{k(e^{kx}+1)}+C$

Aufgabe 3

Vor.: f(x)=f(-x)

Beh.: f´(x)=-f´(-x)

Bew.: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

Gem. Definition des Differentialquotinten

$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}\right)$

$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=$

Verwendung der Voraussetzung; Punktsymmetrie von f

$\lim_{h\to 0} -\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)=$ -f´(x)

Aufgabe 4

g soll Näherungsfunktion von φ sein, da φ schwierig zu integrieren ist.

$=\int_0^{0,5}\varphi(x)dx = \phi(0,5)-\phi(0)$

Hierbei besteht das Problem darin, dass die φ-Funktion nicht ohne weiteres zu integrieren ist. Dabei soll die Funktion g eine Hilfe sein, indem wir Ihre Stammfunktion kennen und sie die φ-Funktion annähert.

= 0,6915 – 0,505

$=0,1915 = \int_0^{0,5} g(x)dx =$

Diese Werte können aus entsprechenden Tabellen abgelesen werden. Eine solche befindet sich am Ende unseres Mathematikbuches.

⇨ a = 1,603

Das geht immer noch zu schnell.... vgl Protokollauszug von Max

---

Aufgabe 4.1

$=\int_0^{\infty}\frac{1,603e^{1,5x}}{1,5(e^{1,5}+1)^2}dx = \lim_{z\to\infty}\left[-\frac{1,603}{1,5(e^{1,5x}+1)}\right]_0^z=$

Da z gegen ∞ strebt und die e-Funktion immer positiv ist strebt der Nenner auch gegen + ∞ wenn ≈ 1 ist strebt somit der ganze Bruch gegen 0 und es ergibt sich daraus folgendes Ergebnis.

weg 0

$$=-\frac{1{,}603}{1{,}5(e^{1{,}52}+1)}+-\frac{1{,}603}{1{,}5(e^{0}+1)}=\frac{1{,}603}{1{,}5(e^{1{,}52}+1)}+\frac{1{,}603}{3}$$

$$=0{,}5345\ +\frac{1{,}068}{(e^{1{,}52}+1)}=0{,}5343+0=0{,}5345$$

weg

Aufgabe 4.2

$$\Phi(x)-\Phi(0)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$$

Wenn wir eine gute Näherungsfunktion g gefunden haben, sollte gelten:

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx \int_0^x g(t)\,dt$$

Dabei ist ein maximales x gesucht, damit die Näherung vertretbar ist.
Wir lesen im Materialblatt den Schnittpunkt der beiden Graphen für φ und g ab; die Schnittstelle ist bei x=1,2.
Als Maß für die Abweichung der beiden Graphen nehmen wir den jeweiligen Inhalt der Flächen zwischen den Graphen.
Diese Abweichung sollte links und rechts gleich groß sein.
Folglich berechnen wir mit Tafel für φ und Stammfunktion für g :

$$\int_0^{1{,}2} \big(\varphi(t)-g(t)\big)dt = 0{,}0049$$

Auf der rechten Seite muss nun durch Ablesen und Probieren ein x gefunden werden, damit ebenfalls

$$\int_{1{,}2}^{x} \big(g(t)-\varphi(t)\big)dt = 0{,}0049$$

C. Schmitt

Mit x=1,6 wird dies gut erreicht.