Scharen (Birmes)

Gegeben seien die Funktionen K_1: $x \mapsto K_1(x) = \lambda - \frac{x^2}{\lambda}$ und K_2: $x \mapsto K_2(x) = \lambda^3 - \lambda x^2$ mit λ als Parameter $(0 < \lambda \neq 1)$.

a) Berechnen Sie das oberhalb der x-Achse gelegene Flächenstück, das von den beiden Funktionen begrenzt wird.

b) Für welchen Wert von λ $(0 < \lambda < 1)$ hat diese Fläche den größten Inhalt? Wie groß ist dieser?

Endergebnisse:

a) A = $\frac{4}{3} \cdot |\lambda^4 - \lambda^2|$

b) $\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow A_{\max} = \frac{1}{3}$

Lösung Scharen:

a) 1. Wir berechnen zuerst die Schnittpunkte von K_1 und K_2:

$K_1(x) = K_2(x) \implies |x| = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$, da $\lambda > 0$ ist.

Das ergibt die Schnittpunkte $S_1(\lambda,\, 0)$ und $S_2(-\lambda,\, 0)$.

2. Da K_1 und K_2 gerade, d.h., um die y-Achse symmetrisch sind, gilt für die gefragte Fläche A:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^\lambda K_2(x)\,dx - \int_0^\lambda K_1(x)\,dx \right|$$

$$= 2 \cdot \left| \left[\lambda^3 x - \frac{\lambda}{3}x^3\right]_0^\lambda - \left[\lambda x - \frac{1}{3\lambda}x^3\right]_0^\lambda \right| = \frac{4}{3} \cdot |\lambda^4 - \lambda^2|$$

b) Für $0 < \lambda < 1$ ist die Fläche $A = \frac{4}{3} \cdot (\lambda^2 - \lambda^4)$.

Ihre Ableitung ist $\frac{dA}{d\lambda} = \frac{4}{3} \cdot \left(2\lambda - 4\lambda^3\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(\lambda - 2\lambda^3\right)$

$\frac{dA}{d\lambda} = 0 \implies \lambda = 0$ oder $|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{2}}$, d.h., $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$, da $0 < \lambda < 1$.

Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist $A = 0$, dazwischen ist A größer als 0. Da A als Funktion von λ stetig differenzierbar ist, und bei $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$ die einzige Stelle zwischen 0 und 1 mit Steigung 0 hat, muss die Fläche A für dieses λ maximal sein. Sie beträgt $A = \frac{1}{3}$.