Beispiel:

f(x) = $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1$

Zuerst definiert man die Funktion in DERIVE, damit sie dem Programm bekannt ist. Dies macht man mit dem Zuweisungsoperator **:=**

f(x):=x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-1

(In DERIVE werden Potenzen mit dem Dach ^ eingegeben.)

Definitionsbereich: Bei dieser Polynomfunktion können keine verbotenen Operationen auftreten. Deshalb ist hier der Definitionsbereich D=ℝ.

Verhalten an den Grenzen des Defintionsbereich: Die Grenzen des Definitonsbereich D=ℝ sind +∞ und -∞. Also muss man den Grenzwert gegen diese beiden Werte berechnen. Dies erfolgt in DERIVE mit der oben erläuterten LIM-Funktion:

LIM(f(x),x,inf,0)

--> ∞

LIM(f(x),x,-inf,0)

--> -∞

*(Hierbei steht die Bezeichnung **inf** in DERIVE als Abkürzung von infinity für unendlich.)*

Berechnung der Nullstellen: Nullstellen der Funktion sind die x-Werte, bei denen der Funktionswert f(x) Null ist. Folglich wählt man den Ansatz f(x)=0 und löst die entstandene Gleichung mit dem SOLVE Befehl nach x auf.

SOLVE(f(x)=0,x)

--> $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^3 + x^2 = 1$

Da DERIVE hier keine expliziten Nullstellen berechnet, wenden wir nun den APPROX Befehl auf die obige Eingabe an, um die Nullstellen numerisch zu approximieren.

APPROX(SOLVE(f(x)=0,x))

--> x = 0.6219597035 – 0.7024379870·i ∨ x = 0.6219597035 + 0.7024379870·i ∨ x = -0.2572172751 – 0.9814163237·i ∨ x = -0.2572172751 + 0.9814163237·i ∨ x = 0.8730581643 ∨ x = -0.6461534271 ∨ x = -1.956389593

Da wir uns über dem Grundraum ℝ befinden, können wir alle komplexen Nullstellen der Funktion (das sind die in denen die imaginäre Einheit *i* auftritt) vernachlässigen. Um DERIVE mitzuteilen, dass generell die Berechnung von komplexen Nullstellen weggelassen werden soll, kann man den SOLVE-Befehl auch mit "Real" als drittem Argument aufrufen:

SOLVE(f(x)=0,x,Real)

--> $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^3 + x^2 = 1$

APPROX(SOLVE(f(x)=0,x,Real))

--> x = 0.8730581643 ∨ x = -0.6461534271 ∨ x = -1.956389593

Extrema:Die Extrempunkte einer Funktion findet man unter den Punkten mit waagerechter Tangente, also unter den x-Werten für die gilt: f'(x)=0. Man berechnet nun zuerst die Ableitung f'(x) mit dem DIF Befehl (gleichzeitig weist man der Funktion mit dem Zuweisungsoperator einen Namen [hier f_1(x)] zu, damit man später leicht darauf zurückgreifen kann). Anschließend setzt man dann die gewonnene Ableitung gleich Null und löst diese Gleichung wieder mit dem schon bekannten SOLVE Befehl (falls nötig auch wieder APPROX verwenden). Um die y-Werte an den berechneten Stellen zu erhalten, muss man die betreffenden x-Werte in die Funktion einsetzten. Dies macht man in DERIVE ganz intuitiv mit **f(x)**.

f_1(x):=DIF(f(x),x)

-->f_1(x) := $7x^6+6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+2x$

SOLVE(f_1(x)=0,x,Real)

--> $7x^5+6x^4-5x^3+4x^2-3x = -2 \vee x = 0$

APPROX(SOLVE(f_1(x)=0,x,Real))

--> x = -1.641000428 ∨ x = 0

f(-1.641000428)

--> $\frac{777961954788373752120451795353182855426684706989024236602157}{61035156250000000000000000000000000000000000000000000000000}$

APPROX(f(-1.641000428))

--> 12.74612866

*(Hier wird **APPROX** verwendet um eine numerische Näherung des unhandlichen Bruches zu berechnen.)*

f(0)

--> − 1

Monotonieverhalten: Da wir eine stetige Funktion diskutieren (alle Polynomfunktionen sind stetig), können wir aus den bis jetzt gesammelten Informationen bereits das Monotonieverhalten der Funktion bestimmen. Wir wissen aus dem Grenzverhalten der Funktion, dass für x-Werte gegen $-\infty$ auch die Funktionswerte gegen $-\infty$ gehen. Da die Funktion bei (-1.64/12.75) ihr "am weitesten links gelegenes" Extremum hat und stetig ist [es ändert sich also das Vorzeichen der 1. Ableitung zwischen $-\infty$ und − 1.64 nicht], muss sie für alle $x < -1.64$ streng monoton steigen. Analog ergibt sich, dass die Funktion für $x > 0$ auch streng monoton steigen muss, da (0/-1) "der rechteste" Extrempunkt ist und die Funktion für x gegen $+\infty$auch gegen $+\infty$strebt. Da man nun leicht sieht, dass die Funktion zwischen den beiden Extrempunkten streng monoton fallend ist, ist das Monotonieverhalten der Funktion vollständig analysiert. Man erkennt, dass (-1.64/12.75) ein Hochpunkt und (0/-1) ein Tiefpunkt ist.

Wendepunkte: Wendepunkte sind Extrempunkte der ersten Ableitung. Sie werden bestimmt in dem man die zweite Ableitung mit dem DIF Befehl berechnet (gleichzeitig weist man der Funktion wieder mit dem Zuweisungsoperator einen Namen [hier f_2(x)] zu). Diese Funktion setzt man wieder gleich Null, löst sie mit dem SOLVE Befehl und erhält die x-Werte der Wendepunkte. Anschließend berechnet man noch die y-Werte der Wendepunkte.

DIF(f(x),x,2)

--> f_2(x) := $45x^5+30x^4-20x^3+12x^2-6x+2$

SOLVE(f_2(x)=0,x,Real)

--> $45x^5 + 30x^4 - 20x^3 + 12x^2 - 6x = -2$

APPROX(SOLVE(f_2(x)=0,x,Real))

--> $x = -1.318137295$

f(-1.318137295)

--> $\frac{1069715961991492776499438031206622236573955425808594009313 81}{1280000000000000000000000000000000000000000000000000}$

APPROX(f(-1.318137295))'

--> 8.357155953

Krümmungsverhalten: Der Wendepunkt der Funktion liegt also bei (-1.32/8.36). Da wir bereits wissen, dass (-1.64/12.75) ein Hochpunkt und (0/-1) ein Tiefpunkt ist, können wir daraus schließen, dass unsere Funktion für alle $x < -1.32$ rechtsgekrümmt und für alle $x > -1.32$ linksgekrümmt ist.

Funktionsgraph: Zu guter Letzt wollen wir nun DERIVE die Funktion graphisch ausgeben lassen. Dazu öffnen wir ein neues 2D-Graphik-Fenster (im Menü unter *Fenster -> Neues 2D-Graphik-Fenster*. Zur besseren Übersicht wählt man am besten gleich auch noch *Fenster -> Vertikal anordnen*). Wir markieren im Algebra-Fenster die Funktion f(x) und drücken im 2D-Graphik-Fenster auf den Knopf *Ausdruck zeichnen*. Die Funktion erscheint. Wir können sie nun unter *Datei -> Einbetten* in unser DERIVE-Arbeitsblatt einfügen.