Faktorisieren eines Polynoms – Nullstellen nutzen

Zur Nullstellenbestimmung (und nicht nur da!) ist es günstig, wenn man ein Polynom in faktorisierter Form angeben kann. Dann kann man nämlich die Nullstellen oft einfach ablesen.

Nun lernst du ein Verfahren kennen, wie du Polynome faktorisieren kannst, wenn Ausklammern nicht möglich ist.

Bekannt: Du kannst jede Zahl vollständig in Primfaktoren zerlegen.

Beispiel: $90 = \underbrace{2}_{\text{Primfaktor}} \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Neu: Etwas vergleichbares gibt es bei Polynomen. **Mit den Nullstellen kannst du jedes Polynom faktorisieren!**

Zerlegungssatz

Ist x_1 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n, dann lässt sich $f(x)$ immer zerlegen in das Produkt $f(x) = \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot g(x)$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vorm Grad $n - 1$.

!

$g(x)$ *kann* nur wiederum weiter faktorisiert werden, wenn es Nullstellen besitzt.

Beispiele:

$f(x) = x^2 - 9 = (x-3) \cdot (x+3) = (x-3) \cdot \big(x - (-3)\big)$

$g(x) = \underbrace{x^3 - 2x^2 + x}_{\text{Grad 3}} = x \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{Grad 2}} = x \cdot (x-1)^2 = \underbrace{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-1)}_{\text{Linearfaktoren}}$

$m(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1) \cdot (x^2 - x - 2) = \underbrace{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2)}_{\text{Linearfaktoren}}$

$s(x) = x^3 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{nicht weiter zerlegbar, da keine Nullstelle}}$

Merke

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens in n Linearfaktoren zerlegt werden.
Ein Polynom vom Grad n hat also höchstens n Nullstellen.
Ein Linearfaktor hat immer die Form $(x - Nullstelle)$

Übrigens…
Beim Faktorsieren eines Polynoms kann der gleiche Linearfaktor mehrfach auftreten, d.h. eine Nullstelle kommt mehrfach vor:

$f(x) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-2) = x^2 \cdot (x+3) \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$

In diesem Beispiel ist die 3 einfache Nullstelle, 0 und 2 sind doppelte Nullstellen und -1 ist dreifache Nullstelle.

mehrfache Nullstellen

Man spricht von einer **k-fachen Nullstelle**, wenn in der vollständig faktorisierten Form eines Funktionsterms der entsprechende **Linearfaktor k-mal vorkommt**. Man erkennt dies meist an der **Potenz des Linearfaktors**.

Folgerungen

Aus den beiden Sätzen lässt sich ein wichtiges Ergebnis ableiten:

Kennst du zu einer Polynomfunktion n-ten Grades alle n Nullstellen, kannst du es sofort vollständig faktorisieren.

Beispiel:

Polynom 2-ten Grades und 2 Nullstellen

a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 10$ hat die Nullstellen $\boldsymbol{x_1 = 2}$ und $\boldsymbol{x_2 = -5}$ *(Mitternachtsformel)*

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2) \cdot (x+5)$

b) Die Funktion $f(x) = x^2 - 3x$ hat die Nullstellen $\boldsymbol{x_1 = 0}$ und $\boldsymbol{x_2 = 3}$ *(Ausklammern)*

Also kannst du sofort sagen: $f(x) = x^2 - 3x = (x-0) \cdot (x-3) = x \cdot (x-3)$

Wichtig: Steht vor der höchsten Potenz von x (hier x^2) noch ein Faktor, klammere diesen zuerst aus!

c) Bestimme Faktorisierung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12)$

Dann kannst du wieder die Nullstellen des Polynoms in der Klammer bestimmen (hier $x_1 = -4; x_2 = 3$) und faktorisieren:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + x - 12) = \frac{1}{2}(x+4)(x-3)$$

Wozu kann ich das brauchen?

Das hilft dir zum Beispiel in der Oberstufe bei gebrochenrationalen Funktionen. Faktorisierst du Zähler und Nenner kannst du nämlich kürzen und den Term schnell vereinfachen!

Beispiel

Aufgabe: Vereinfache den Term $\frac{4x^2+12x-112}{4x\cdot(x+7)}$

Strategie: Faktorisiere den Zähler: $4x^2 + 12x - 112$

Mitternachtsformel liefert die Nullstellen $x_1 = 4$ und $x_2 = -7$

⇒ Zähler in faktorisierter Form: $4x^2 + 12x - 112 = 4 \cdot (x^2 + 3x - 28) = 4 \cdot (x-4)(x+7)$

⇒ Vereinfache den Term durch Kürzen

$$\frac{4x^2 + 12x - 112}{4x \cdot (x+7)} = \frac{4 \cdot (x-4)(x+7)}{4x \cdot (x+7)} \overset{x \neq -7}{=} \frac{x-4}{x} = 1 - \frac{4}{x}$$

$D = \mathbb{R}\backslash\{-7; 0\}$

$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Achtung:

Man darf nur dann mit $(x+7)$ kürzen, wenn $x \neq -7$ ist. Ansonsten würde man ja mit 0 kürzen, verboten!

Die beiden Terme sind überall gleich, außer an der Stelle $x = -7$.

Man erkennt das auch daran, dass der linke Term an der Stelle $x = -7$ nicht definiert ist, der rechte hingegen schon.