§ 2. Die entsprechenden Integralformeln.

1. Allgemeine Integrationsregeln.

Der Fundamentalsatz des § 4 vom zweiten Kapitel bzw. die Definition des unbestimmten Integrales eröffnet uns die Möglichkeit, jeder Differentiationsformel eine entsprechende äquivalente Integralformel gegenüberzustellen. Mit den ersten drei Differentiationsregeln des vorigen Paragraphen sind offenbar die folgenden zum Teil schon im zweiten Kapitel, § 1, erwähnten Integrationsregeln vollständig äquivalent.

Multiplikation mit einer Konstanten: Ist c eine Konstante, so ist

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx.$$

Integration einer Summe: Es ist stets

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Der dritten Differentiationsregel entspricht die *Regel der Produktintegration oder Teilintegration (partielle Integration)*. Durch Integration erhalten wir aus der Produktregel

$$\int \big(f(x)\, g(x)\big)'\, dx = \int f(x)\, g'(x)\, dx + \int g(x)\, f'(x)\, dx.$$

Das unbestimmte Integral auf der linken Seite ist offenbar (bis auf eine additive Konstante) $f(x)\, g(x)$, und wir können daher die Regel der Produktintegration in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx.$$

Diese wichtige Integralformel erscheint hier als Gegenstück zu der Produktregel der Differentiation; wir werden auf sie ausführlich im nächsten Kapitel zurückkommen (s. dort § 4).