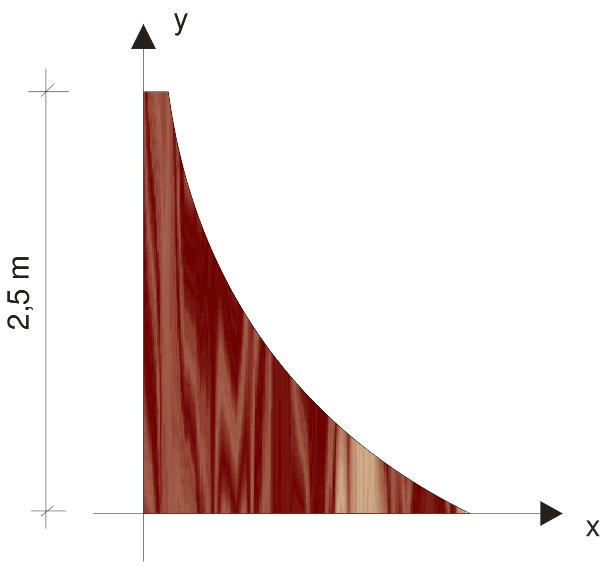
Aufgabe 1: Holzverschnitt
Ein Schreiner hat einen Holzrest (siehe Abbildung). Er möchte sich aus diesem Rest einen möglichst großen rechteckigen Tisch herstellen. Die rechte Schnittkante lässt sich dabei gut als Logarithmusfunktion $f(x) = \ln\frac{2}{x}$ approximieren.



a) Bestimmen Sie rechnerisch die maximalen Abmessungen der neuen rechteckigen Tischplatte. **(20 Punkte)**

   Hinweis: Sollten Sie keine Zielfunktion aufstellen können, rechnen Sie mit folgendem Kontrollergebnis weiter: $A(x) = x \cdot \ln 2 - x \cdot \ln x$.

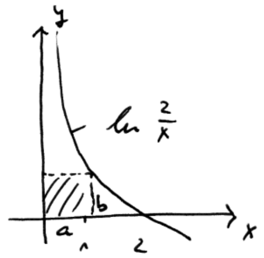
b) Diskutieren Sie die Zielfunktion aus Aufgabenteil a) über dem maximal möglichen Definitionsbereich. Bestimmen Sie dazu:

   i. Definitionsbereich,
   ii. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
   iii. Hoch-, Tief- und Wendepunkte und
   iv. das Verhalten an den Definitionsrändern.

   Stellen Sie anschließend Ihre Ergebnisse in einem Koordinatensystem qualitativ dar. **(27 Punkte)**

Lösungsvorschlag

$\boxed{\text{Holzverschnitt}}$



a) HB: $A(a,b) = a \cdot b$

NB: $a = x$; $b = y = \ln\frac{2}{x}$; $x \in \left]0;2\right]$

$\ln\frac{2}{x} = 0 \iff \underline{\underline{x = 2}}$

ZF: (NB -> HB) $A(x) = x \cdot \ln\frac{2}{x}$; $D = \left]0;2\right]$

$\boxed{A'(x) = 0} \Rightarrow 0 = \ln 2 - \ln x - 1$

$\ln x = \ln 2 - 1$

$x = e^{\ln 2 - 1}$

$x = \frac{e^{\ln 2}}{e^1}$

$x = \underline{\underline{\frac{2}{e}}}$

Ableitungen:

$A'(x) = \ln\frac{2}{x} + x \cdot \frac{1}{\frac{2}{x}} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2}$

$= \ln\frac{2}{x} - \frac{x^2 \cdot 2}{2 \cdot x^2}$

$= \underline{\underline{\ln 2 - \ln x - 1}}$

$A''(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{x}}}$

$A''\left(\frac{2}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{2}{e}} = -\frac{e}{2} < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{2}{e} \,/\, \frac{2}{e}\right)$

Maximale Abmessungen: $a = \frac{2}{e} \approx 0{,}74\,m$

$b = \ln\frac{2}{\frac{2}{e}} = \ln e = \underline{\underline{1}}\,m$

b) <u>Funktionsuntersuchung</u>: $f(x) = x \cdot (\ln 2 - \ln x)$

(i) $D = \mathbb{R}^{>0}$

(ii) $\boxed{f(x) = 0} \Rightarrow 0 = x \cdot (\ln 2 - \ln x)$, da $\mathbb{R}^{>0}$

$\Rightarrow 0 = \ln 2 - \ln x \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

Nullstelle: $N(2/0)$

$\boxed{f(0) =}$ Da $\mathbb{R}^{>0}$ gilt, folgt, dass es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse gibt.

(iii) Extrema: siehe a) $HP\left(\frac{2}{e} / \frac{2}{e}\right)$

Wendepunkt: $\boxed{f''(x) = 0} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{x}$ ↯

$\Rightarrow$ kein Wendepunkt

(iv) Linker Rand: $\lim\limits_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \underbrace{(\ln 2 - \ln x)}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \infty$

Hier kann man keine konkrete Aussage machen. Da $\ln x$ jedoch viel schneller gegen ∞ strebt, als x gegen 0, kann man diese Eigenschaft ausnutzen.
Damit gilt: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$. (Altern.: L'Hopital)

Rechter Rand: $\lim\limits_{x \to \infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x} \cdot \underbrace{(\ln 2 - \ln x)}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} = -\infty$

<u>Skizze</u>: