Die Logik – Werkzeug der modernen Philosophie (I)

Geschichte der Logik

<u>Die traditionelle Logik</u>
Die Logik als förmliche "Wissenschaft vom Wissen" geht auf Aristoteles zurück. Nach Aristoteles analysiert die Logik das Denken und Sprechen und versucht diese auf ihre Grundelemente und Grundfunktionen zu reduzieren. Sie soll eine Anweisung für ein einwandfreies, "wissenschaftliches" Denken, Beweisen und Widerlegen geben. Das Herzstück der aristotelischen Logik ist die Lehre vom Schluß in seiner idealen Form, der **Syllogismus**. Dieser besteht aus zwei Urteilen, den sogenannten **Prämissen**, und dem Schlußsatz, der **Conclusio**. Es handelt sich dabei immer um eine **Deduktion**, d.h. eine Ableitung eines Besonderen aus einem Allgemeinen.

Beispiele:

A) Alle G sind H,	*Alle Menschen sind sterblich,*
Alle F sind G;	*Alle Griechen sind Menschen*;
$\Rightarrow$ Alle F sind H.	$\Rightarrow$ *Alle Griechen sind sterblich*
B) Kein G ist H,	*Kein Philosoph ist böse,*
Einige F sind G;	*Einige Griechen sind Philosophen*;
$\Rightarrow$ Einige F sind nicht H	$\Rightarrow$ *Einige Griechen sind nicht böse.*

- Suche nach weiteren Kombinationsmöglichkeiten der Satzformen *'Alle F sind G', 'Kein F ist G', 'Einige F sind G', 'Einige F sind nicht G'*, die (intuitiv) gültige Schlüsse ergeben und gib jeweils ein Beispiel an.

Die aristotelische Form der Logik blieb bis in das 19.Jahrhundert hinein weitgehend erhalten. Im Mittelalter und der frühen Neuzeit spielte die Logik als Theorie der formalen Bedingungen und Regeln wissenschaftlicher Rede ('sermo') eine überragende Rolle bei der Auslegung von Texten und den Gottesbeweisen. [**Anm**.: 'Wisenschaft' war im Mittelalter die Auslegung von Texten und nicht die (Natur-)wissenschaft im heutigen Sinne]

Wichtige Logiker: Peter Abaelard (1079-1142), Thomas von Aquin (1224-1274), Wilhelm von Ockham (1286-1347), Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716)

<u>Die moderne Logik</u>
Die Entwicklung der modernen Logik ist eng mit der Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert verbunden. Die Mathematiker des 19.Jahrhunderts betrachteten es als ihre Hauptaufgabe, Ordnung in ihr Fach hineinzubringen. Dies beinhaltete zwei Punkte: zum einen die Axiomatisierung der mathematischen Theorien, das heißt den Versuch, sie so zu formen, daß sowohl die Grundbegriffe als auch die Grundaussagen (Axiome) einer Theorie klar aufgezeigt werden; zum anderen eine Verbesserung der mathematischen Beweisführung. Sie sollte streng und exakt sein, damit den zahlreichen unvollständigen und oftmals fehlerhaften Beweisen, welche die Mathematik in ihrer großen Blütezeit im 17.Jahrhundert belastet hatten, entgegengewirkt werden konnte. Zu diesem Zweck versuchte man die Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Die traditionelle Logik erwies sich für diese Zwecke sehr schnell als untauglich.

Die entscheidende Wende brachte der deutsche Mathematiker und Philosoph **Gottlob Frege**. Er regte ein Grundkonzept an, das einerseits die Schlußregeln klären sollte und andererseits das Problem der Mehrdeutigkeit in der Umgangssprache beseitigen sollte. Er schlug zu diesem Zweck die Schaffung einer Kunstsprache für mathematisches Argumentieren vor, einer formalisierten Sprache als Ersatz für die natürliche Sprache ["*Begriffsschrift*"(1879)]. Auf diese Weise versuchte er die Arithmetik (Zahlenlehre) aus der Logik zu entwickeln. Dieses Projekt scheiterte kurz vor seiner Vollendung als **Bertrand Russel** zeigte, daß sich aus Freges System ein Widerspruch (**Antinomie**) ergab. Das Projekt wurde jedoch mehr oder weniger erfolgreich weitergeführt. Endgültig scheiterte das Vorhaben erst als 1931 der Mathematiker **Kurt Gödel** in seinem "*Unvollständigkeitssatz*" bewies, daß es in hinreichend starken Systemen der Logik zwangsläufig Sätze geben mußte, die nicht bewiesen werden konnten. In der Zwischenzeit hatten sich jedoch viele andere Gebiete der Philosophie der logischen Methode bedient und sie für ihre Zwecke weiterentwickelt, so daß heute die formale Logik das wichtigste Werkzeug der Philosophie geworden ist.

- Welche unterschiedlichen Funktionen hat das Wort *'ist'* bzw. *'sein'* in der Umgangssprache? Wann wird diese Mehrdeutigkeit zum Problem?
- *Russels Paradox* (in umgangssprachlicher Form): In einem Dorf rasiert der Dorfbarbier alle Männer, die sich nicht selbst rasieren. Das heißt: er rasiert <u>nur die</u> Männer, die sich nicht selbst rasieren, und <u>alle</u> Männer, für die dies zutrifft. Rasiert der Barbier sich selbst? (Dieses Paradox kann formal aus Freges System abgeleitet werden.)

Die formale Logik

<u>Aussagenlogik</u>
Die einfachste logische Theorie ist die Aussagenlogik. In ihr werden sprachliche Ausdrücke untersucht, mit denen sich aus gegebenen Sätzen neue, komplexere Sätze erzeugen lassen, d.h. der Inhalt der Sätze spielt keine Rolle, sondern nur ihre Verbindung.

Beispiel:

A: "Sokrates war ein Grieche."
B: "Thales war ein Philosoph."
A$\wedge$ **B**: "Sokrates war ein Grieche <u>und</u> Thales war ein Philosoph."

Das System der Aussagenlogik wird streng aufgebaut. Am Anfang steht die Festlegung der **elementaren Symbole** und der **Bildungsregeln** der Sprache (PC).

Die elementaren (undefinierten) Symbole sind die Buchstaben **p, q, r,** ... und die folgenden vier Symbole: $\vee$ **,** $\neg$ **, (,).**

Um Formeln von PC (z.B. $\mathbf{p}$, $\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$, $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$) von bloßen Ausdrücken (z.B. $\mathbf{p)q}\neg\,\mathbf{r}$ oder $\mathbf{r}\neg \vee \mathbf{q}$) zu unterscheiden, benötigen wir noch Bildungsregeln:

BR1: Ein einzelner Buchstabe ist eine Formel von PC (z.B. **p**),

BR2: Wenn α eine Formel ist, so auch $\neg\alpha$ (z.B. $\neg((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee (\mathbf{r} \vee \neg \mathbf{s}))$)

BR3: Wenn α und β Formeln sind so auch $(\alpha \vee \beta)$ (z.B. $(\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}) \vee (\mathbf{r} \vee \neg \mathbf{r})$)

Damit kennen wir die **Syntax** ("Grammatik")von PC.

Bisher haben wir nur eine Anzahl von Formeln. Was wir benötigen ist eine **Interpretation** der Symbole (d.h. eine **Semantik** für PC): Die Buchstaben stehen natürlich für Sätze und wir setzen voraus, daß alle betrachteten Sätze Aussagesätze sind und entweder **wahr** oder **falsch** sind. Die Symbole $\neg$ und $\vee$ sind dagegen **Satzverbindungszeichen**. Ihre "Bedeutung" wird mit Hilfe sogenannter Wahrheitswerttabellen festgelegt: Um die Wahrheit bzw. Falschheit einer **Negation** ($\neg \alpha$) oder einer **Alternation** ($\alpha \vee \beta$) zu bestimmen, genügt es, die Wahrheit oder Falschheit ihrer Glieder zu kennen. Man nennt Negation und Alternation daher auch **Wahrheitsfunktionen**.

p	**¬ p**	"nicht-p"
w	f	**Negation**
f	w	

p	**q**	**p∨ q**	"p oder q"
w	w	w	**Alternation**
w	f	w	
f	w	w	
f	f	f	

Aus Gründen der Einfachheit werden noch weitere Wahrheitsfunktionen zur Darstellung der Formeln verwendet, obwohl $\neg$ und $\vee$ ausreichen würden:

p	**q**	**p∧ q**	"p und q"
w	w	w	**Konjunktion**
w	f	f	
f	w	f	
f	f	f	

p	**q**	**p⊃ q**	"wenn p dann q"
w	w	w	**Implikation**
w	f	f	
f	w	w	
f	f	w	

p	**q**	**p≡ q**	"p äuquivalent q"
w	w	w	**Äquivalenz**
w	f	f	
f	w	f	
f	f	w	

- Bestimme die Wahrheitswertverteilung folgender Formeln:

  a. $(p\supset q) \supset (\neg p\supset \neg q)$,
  b. $p\supset (p\wedge q)$,
  c. $\neg (p\vee \neg p)$,
  d. $(p\vee \neg p) \supset (p\wedge \neg p)$

- Jeweils zwei der folgenden Formeln sind äquivalent, d.h. haben dieselbe Verteilung der Wahrheitswerte. Welche?

  a. $\neg p\vee q$
  b. $(p\supset q)\wedge (q\supset p)$
  c. $\neg (\neg p\wedge \neg q)$
  d. $p\supset q$
  e. $p\equiv q$
  f. $\neg (\neg p\vee \neg q)$
  g. $p\vee q$
  h. $p\wedge q$

Ein Satz heißt **aussagenlogisch wahr**, wenn er immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte seine einfachen Teilsätze haben. **Aussagenlogisch falsch** heißt ein Satz, wenn er immer falsch ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte seine einfachen Teilsätze haben. Im ersten Fall spricht man von einer **Tautologie**, im zweiten Fall von einer **Kontradiktion**. Alle anderen Sätze bezeichnet man als **indeterminiert**. Ein Ziel der Logik ist es nun einen Weg aufzuzeigen, wie aus wahren Sätzen andere wahre Sätze gewonnen werden können. Seit Aristoteles ist die ideale Form einer derartigen Theorie das axiomatische System. Ein **axiomatisches System** besteht aus einer Liste von **Axiomen**, den grundlegenden Sätzen oder Prinzipien dieser Theorie, und aus Regeln, die besagen, wie man aus diesen Axiomen die übrigen Sätze oder **Theoreme** der Theorie gewinnen kann **(der logische Schluß**!). Man bezeichnet diese axiomatische Theorie auch als einen **Kalkül**. Ein Kalkül muß vollständig sein, d.h. alle wahren Sätze der Theorie erzeugen, und natürlich widerspruchsfrei.

Ein möglicher **Kalkül der Aussagenlogik** sähe dann folgendermaßen aus:

Axiome von PC sind alle Sätze der Gestalt

A1) $P \supset (Q \supset P)$

A2) $(P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R))$

A3) $(\neg P \supset \neg Q) \supset (Q \supset P)$

Als *Deduktionsregel* von PC dient die Regel:

R1) Aus den Sätzen P und $P \supset Q$ kann man den Satz Q gewinnen ($P, P \supset Q \rightarrow Q$)

Mit Hilfe dieses Kalküls können wir nun alle aussagenlogisch wahren Sätze erzeugen. Interessanter ist jedoch, daß auch die Wahrheit oder Falschheit von Sätzen bewiesen werden kann. Vereinfacht kann man sagen, daß ein Satz wahr ist, wenn er in PC bewiesen werden kann und falsch, wenn dies nicht möglich ist.

Wichtige aussagenlogische Schlüsse:

- $p \supset q, p \rightarrow q$ (*Modus Ponens*)
- $p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p$
- $p \supset q, q \supset r \rightarrow p \supset r$
- $p \wedge \neg p \rightarrow q$ (*ex contradictione quodlibet*)