

Musterlösung der Musterklausur

Fach:	<i>Mathematik</i>	Themen:	<i>Differenzialgleichungen</i>
Datum:	<i>03. April 2011</i>	Protokoll:	<i>Catalina Vetter</i>
Lehrer:	<i>C. Schmitt</i>	Jgst. / Kurs:	<i>Leistungskurs 13</i>

#1

a)

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1,2 \cdot 1 = 1,2$$

$$f(2) = f(1) \cdot 1,2 = 1 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,2^2$$

Allgemein:

$$f(t) = 1,2^t$$

$$f(t) = 50\,000$$

$$50\,000 = 1,2^t$$

$$\ln 50\,000 = t \cdot \ln 1,2$$

$$\frac{\ln 50\,000}{\ln 1,2} = t$$

$$t = 59,34$$

Am Anfang muss das Gerücht eine Person kennen, was bedeutet, dass zum Zeitpunkt $t=0$ $f(t)=1$ sein muss, da $f(t)$ die Anzahl der Personen, die das Gerücht bereits kennen, in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

Wenn alle 50 000 Personen der Stadt das Gerücht kennen sollen, muss der Funktionswert $f(t)=50\,000$ sein.

Nach ca. 60 Wochen kennt also jeder Einwohner der Stadt das Gerücht.

b)

$$f(0) = K$$

$$\begin{aligned} f(1) &= K - K \cdot 0,026 \\ &= 0,974 \cdot K \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t=0$ ist K der Geldwert, welcher nach einem Jahr auf $0,974K$ gesunken ist.

$$\begin{aligned}f(2) &= 0,974 \cdot K - 0,974 \cdot K \cdot 0,026 \\ &= 0,974 \cdot K(1 - 0,026) \\ &= 0,974 \cdot K \cdot 0,974 \\ &= K \cdot (0,974)^2\end{aligned}$$

Allgemein lässt sich das ausdrücken als:

$$f(t) = K \cdot (0,974)^t$$

nach 8 Jahren: $t = 8$

$$\begin{aligned}f(8) &= K \cdot (0,974)^8 = 0,80998 \cdot K \\ f(0) - f(8) &= K - 0,80998 \cdot K = 0,19 \cdot K\end{aligned}$$

Das Geld hat nach 8 Jahren also 19% an Wert verloren.

#2

$$f_4(x) = 2e^{3x}$$

$$f_4'(x) = 6e^{3x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

$$6e^{3x} = 3 \cdot 2e^{3x}$$

$$6e^{3x} = 6e^{3x}$$

#3

$$f'(x) = -2 \cdot f(x)$$

$$f(x) = K \cdot e^{-2x}$$

$$f'(x) = -2K \cdot e^{-2x}$$

$$f(0) = 2$$

$$K \cdot e^{-2 \cdot 0} = 2$$

$$K \cdot e^0 = 2$$

$$K = 2$$

Die Bedingung $f(0) = 2$ wird von der Funktion $f(x) = 2e^{-2x}$ erfüllt.

#4

a)

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

$$f'(x) \cdot f(x) = -x$$

$$\int f'(x) \cdot f(x) dx = -\int x dx$$

$$g(x) = f(x) \quad g'(x) = f'(x)$$

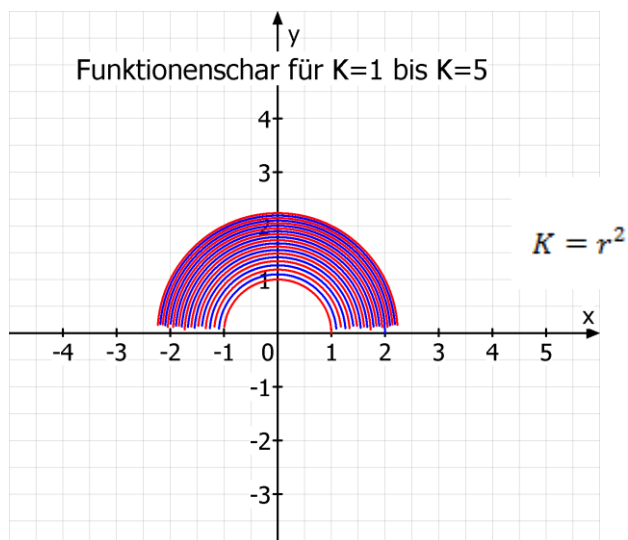
$$h(g(x)) = h(f(x)) = f(x)$$

$$h(z) = z \quad H(z) = \frac{1}{2}z^2$$

$$\frac{1}{2}(f(x))^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$(f(x))^2 = -x^2 + 2C$$

$$f(x) = \sqrt{K - x^2}$$



b)

$$f'(x) = -\frac{3f(x)}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln f(x) = -3 \ln x + C$$

$$f(x) = e^{-3 \ln x + C}$$

$$f(x) = (e^{\ln x})^{-3} \cdot e^C$$

$$f(x) = a \cdot x^{-3} = a \cdot \frac{1}{x^3}$$

c)

$$xf'(x) - 3 = f(x)$$

$$xf'(x) = f(x) + 3$$

$$f'(x) = \frac{f(x) + 3}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x) + 3} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x) + 3} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$g(x) = f(x) + 3 \quad g'(x) = f'(x)$$

$$h(g(x)) = h(f(x) + 3)$$

$$h(z) = \frac{1}{z} \quad H(z) = \ln z + C$$

$$\ln(f(x) + 3) = \ln x + C$$

$$e^{\ln(f(x)+3)} = e^{\ln x + C}$$

$$f(x) + 3 = e^{\ln x} \cdot e^C$$

$$f(x) + 3 = K \cdot x$$

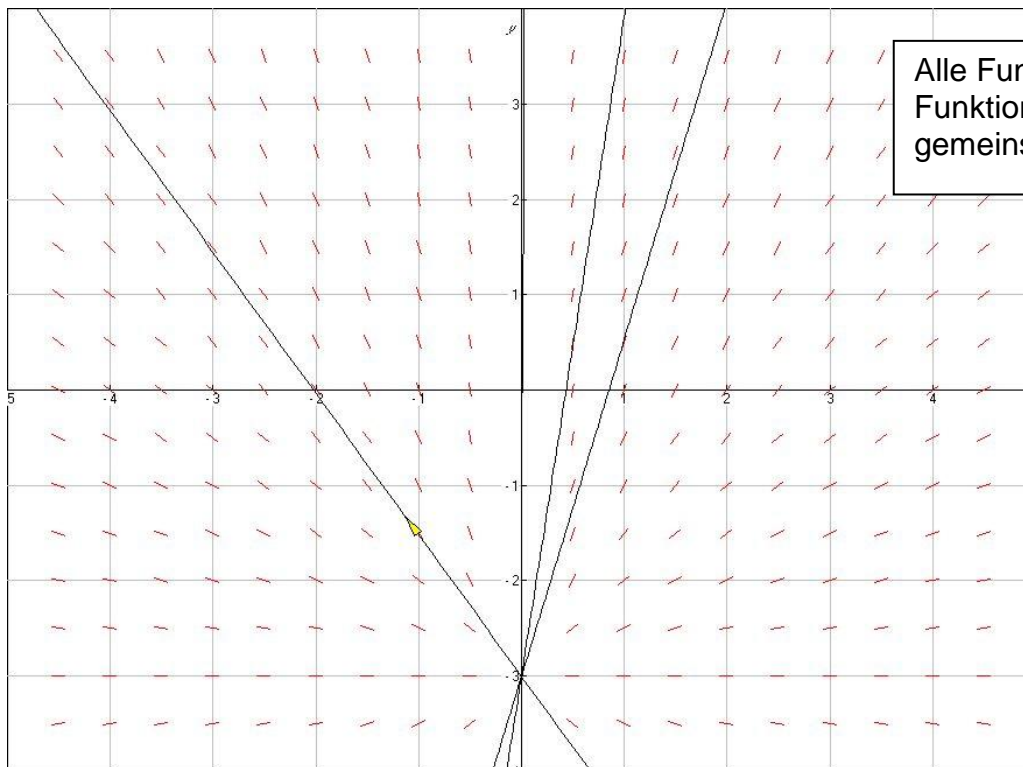
$$f(x) = K \cdot x - 3$$

#5

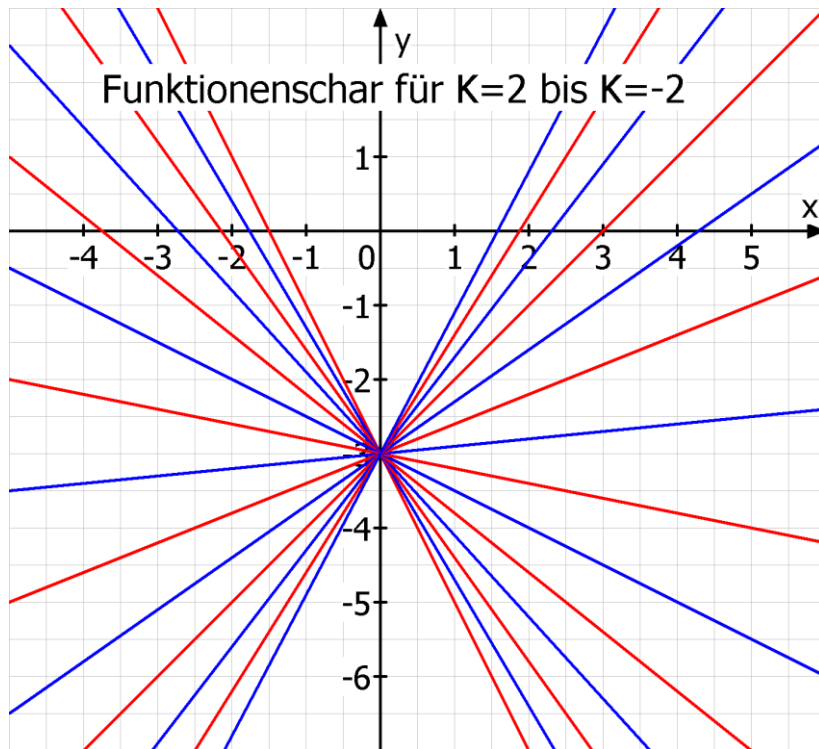
$$xf'(x) - 3 = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) + 3}{x}$$

Richtungsfelder für die Funktion:



Alle Funktionen der
Funktionenschar haben den
gemeinsamen Punkt $P(0|-3)$.



#6

$$f(x) \cdot e^x + f'(x) \cdot e^x = -e^{-x}$$

$$\int (f(x) \cdot e^x + f'(x) \cdot e^x) dx = - \int e^{-x} dx$$

$$f(x) \cdot e^x = e^{-x} + C$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{e^x} + \frac{C}{e^x}$$

$$f(x) = e^{-2x} + \frac{C}{e^x}$$

#7

$$t(x) = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) (x - x_0) = -f(x_0)$$

$$(x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 = x_0 - 4$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 4$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{4} dx$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{4}x + C$$

$$e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{4}x + C}$$

$$f(x) = e^{0,25x} \cdot e^C$$

$$f(x) = K \cdot e^{0,25x}$$

$$f'(x) = 0,25K \cdot e^{0,25x}$$

Test für K=1

$$t(x) = 0,25K \cdot e^{0,25x_0}(x - x_0) + K \cdot e^{0,25x_0}$$

$$t(x) = 0,25 \cdot e^{0,25x_0}(x - x_0) + e^{0,25x_0}$$

$$x_0 = 1:$$

$$t(x) = (0,25(x - 1) + 1) \cdot e^{0,25} = 0$$

$$0,25(x - 1) = -1$$

$$x - 1 = -4$$

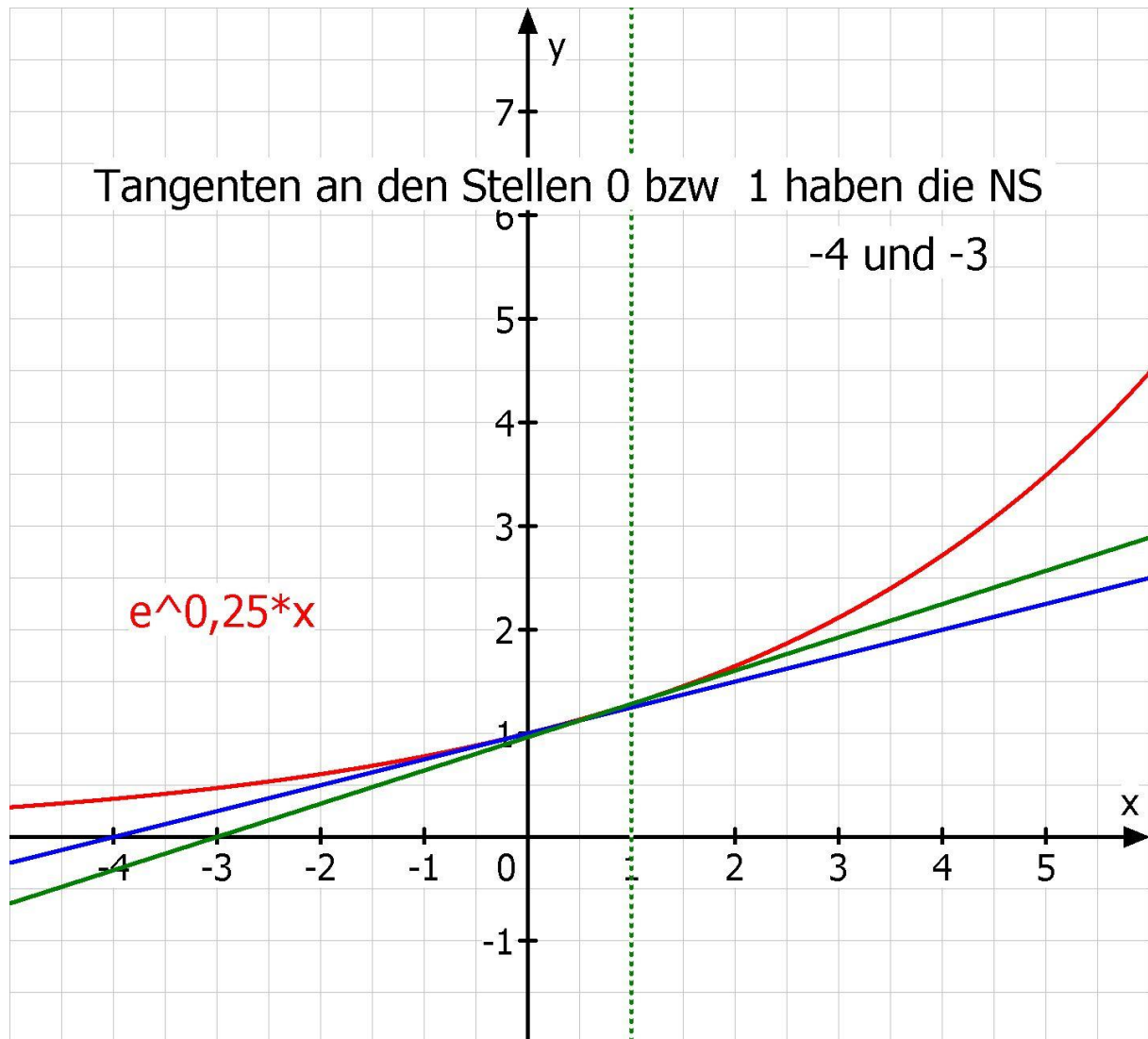
$$x = -3$$

$$x_0 = 0:$$

$$t(x) = 0,25(x - 0) + 1 = 0$$

$$0,25 x = -1$$

$$x = -4$$



#8

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$n(0) = \frac{x_0}{f'(x_0)} + f(x_0) = f(x_0) + 4$$

$$\frac{x}{f'(x)} = 4$$

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x}{4}$$

$$\int f'(x) dx = \frac{1}{4} \int x dx$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{4} C$$

$$f(x) = K + \frac{1}{8} x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x$$

$$\rightarrow n(x) = -\frac{4}{x_0} (x - x_0) + K + \frac{1}{8} x_0^2$$

