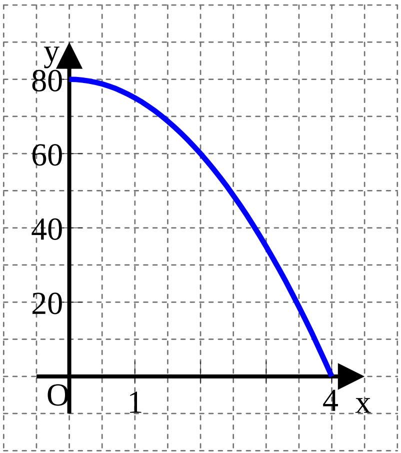
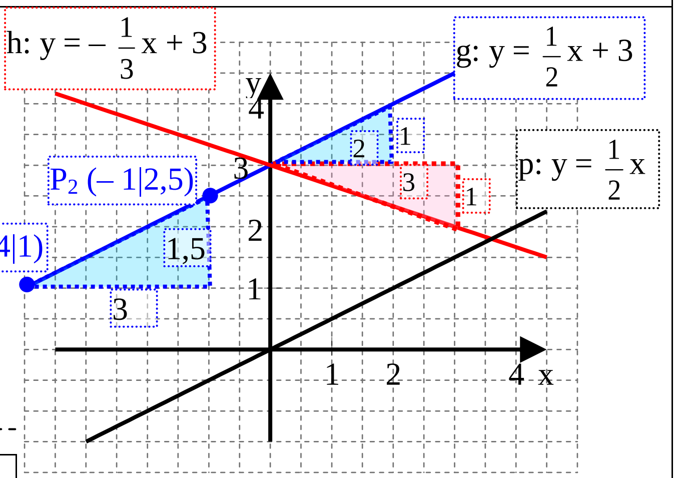
Gymnasium Stein	Grundwissenkatalog Mathematik	Jahrgangsstufe 8

Wissen/Können	Aufgaben und Beispiele
Rechnen mit **Bruchtermen** (Grundrechenarten)	***Prinzipiell die gleichen Regeln wie bei Bruchzahlen!*** z.B. zum Addieren und Subtrahieren: *Erweitern auf den Hauptnenner* *und vereinfachen:* $\frac{b}{2a-b}+\frac{a-b^2}{2ab-b^2}=\frac{b^2+a-b^2}{b(2a-b)}=\frac{a}{2ab-b^2}$
Lösen von **Bruchgleichungen**	*Multiplikation mit dem Hauptnenner; danach kürzen:* $\frac{x-1}{x}=2-\frac{x}{x+1}$; $\mid \cdot x(x+1)$ G = Q, D = Q\{-1 ; 0} $(x-1)(x+1)=2x(x+1)-x^2$; *Auflösen nach x:* ... $x=-\frac{1}{2}\in D$ L = { $-\frac{1}{2}$ }
Einfacher **Spezialfall**: Auf beiden Seiten der Gleichung nur je ein Bruch	*i.A.: Kreuzweise multiplizieren* *(nur sinnvoll bei "teilerfremden Nennern"; vgl. Wh.aufgabe Nr. 3o)* $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$; G = Q, D = Q\{ 0 ; 3 } $2x = 3(x-3) \Leftrightarrow x=9$ L = {9}
Auflösen von **Formeln**	*Auflösen von* $D=\frac{F}{s-s_0}$ *nach* ***s*** : $D(s-s_0)=F \Rightarrow ... \Rightarrow s=\frac{F}{D}+s_0$ *Auflösen von* $R=\frac{U-U_0}{\frac{U_0}{R_{ges}}}$ *nach* R_{ges}: $R\cdot\frac{U_0}{R_{ges}}=U-U_0 \Rightarrow R_{ges}=R\cdot\frac{U_0}{U-U_0}$
Funktionen Zur Angabe einer Funktion gehören • Definitionsmenge **D** • Funktionsvorschrift: Einer Größe x wird eindeutig eine Größe y zugeordnet: $x \mapsto y$ ○ Funktionsterm *f(x)* ○ Funktionsgleichung *y = f(x)* Aus diesen Angaben ergibt sich die • Wertemenge **W**	Beispiel: *Ein Stein fällt aus einer Höhe von 80 m in 4 s zu Boden.* Für *x = Zeit in Sekunden* gilt hier also **D** = [0 ; 4] *Jedem Zeitpunkt x kann eindeutig eine Höhe y zugeordnet werden!* **Wertetabelle** *(z.B. aus Experiment)*: *x in s* | 0 1 2 3 4 *y in m* | 80 75 60 35 0 $f(x)=80-5x^2$ $y=80-5x^2$ *(Zuordnung hier als Gleichung)*  **W** = [0 ; 80] *(„Menge der y")*
Wichtigster Spezialfall: Die **lineare Funktion** • Funktionsgleichung $y = m\cdot x + t$ • Steigung $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ • y-Abschnitt *t* • Der **Graph** einer linearen Funktion ist eine **Gerade**	Bsp.: g: $y=\frac{1}{2}x+3$ $m=\frac{2{,}5-1}{-1-(-4)}=\frac{1{,}5}{3}=\frac{1}{2}$ t = 3 Zeichnen z.B. mit y-Abschnitt und Steigungsdreieck 
• Spezialfall: Die **direkte Proportionalität**	$y = m\cdot x \Leftrightarrow \boxed{\frac{y}{x}=m=\text{const.}}$; Kurzschreibweise : $y \sim x$ Der Graph ist eine Gerade durch den **Ursprung** (t = 0 ; im Bsp. Gerade p)

Hinweis: zum Thema „lineare Funktionen" findet man ein ausführlicheres Arbeitsblatt auf unserer Homepage: www.gymnasium-stein.de *(unter Fachschaft Mathematik)*

Einfache gebrochen-rationale Funktionen

- (maximale) Definitionsmenge D
- Achsenschnittpunkte
- Asymptoten

$f(x) = \frac{2-x}{2x+4}$

„verboten“ ist „Nenner = 0“

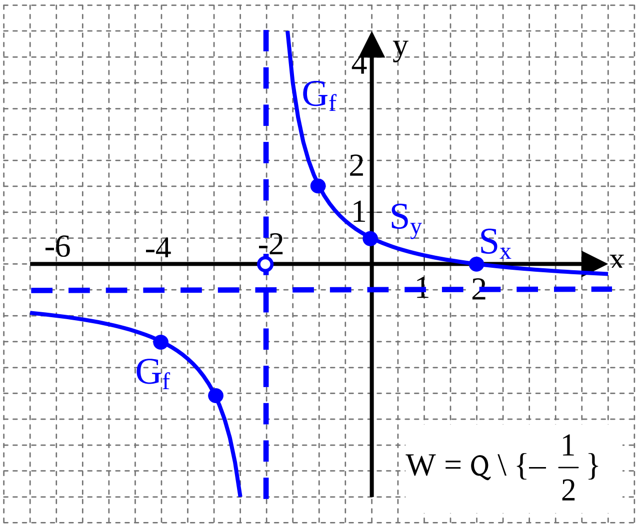
Also: $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$\rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

$\rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = -2$

$\left.\begin{array}{l} S_x : y = 0 \\ \Leftrightarrow\ 2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \end{array}\right\} S_x(2|0)$

$\left.\begin{array}{l} S_y : x = 0 \\ \Rightarrow y = \frac{2-0}{0+4} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} S_y(0|\frac{1}{2})$



$\left.\begin{array}{l} f(1000) = -\ 0{,}498\ldots \approx -0{,}5 \\ f(-1000) = -0{,}502\ldots \approx -0{,}5 \end{array}\right\}$ waagrechte Asymptote: $y = -0{,}5$

Zum Skizzieren des Graphen genügen jetzt wenige zusätzliche Funktionswerte, z.B.: $f(-4) = -1{,}5$; $f(-3) = -2{,}5$; $f(-1) = 1{,}5$

Spezialfall:
Die **indirekte Proportionalität**

Funktionsgleichung

$f(x) = \frac{c}{x}$

bzw : $y = \frac{c}{x}$

Die **Graphen** heißen **Hyperbeln**

$y = \frac{c}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{y \cdot x = c = \text{const.}}$

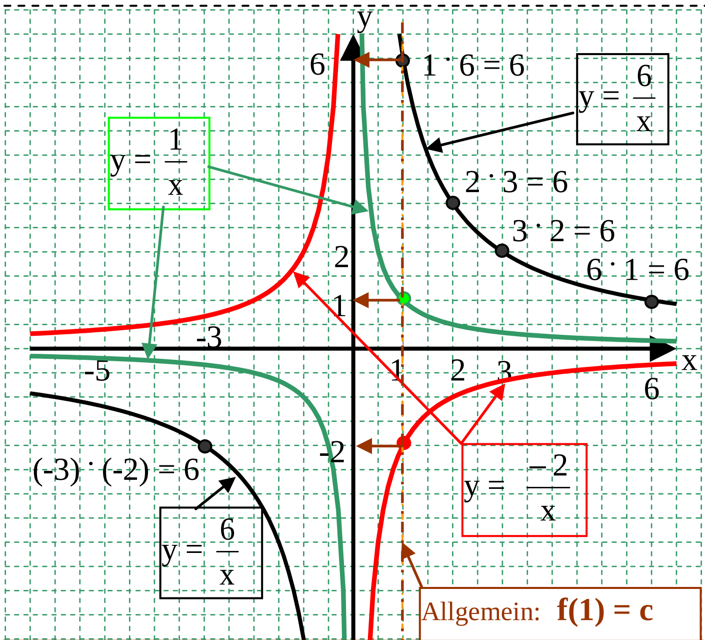
(Im nebenstehenden Beispiel für c = 6 an einigen Punkten des Graphen demonstriert)

$y = \frac{c}{x} = c \cdot \frac{1}{x}$

$\rightarrow$Kurzschreibweise:

$y \sim \frac{1}{x}$

Asymptoten des Graphen: Achsen des Koordinatensystems



Anwendungen: a) einfach zu berechnender Graphenpunkt
b) direkte Ablesung von c aus dem Graphen

Lineare Ungleichungen

Umkehrung des Ungleichungszeichens bei Multiplikation mit negativer Zahl bzw. Division durch negative Zahl

auch graphisches Lösungsverfahren

Intervalle als Lösungsmenge

a) $2x + 1 < 3 \quad | -1$

$2x < 2$

$x < 1$

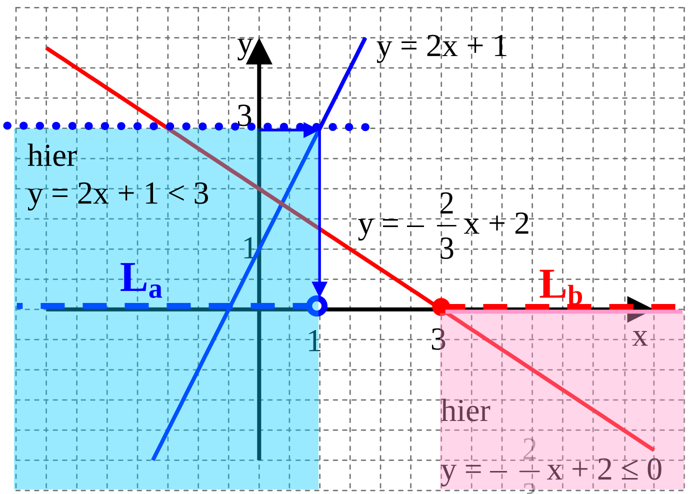
$L_a =]\infty ; 1[$

b) $-\frac{2}{3}x + 2 \leq 0$

$-\frac{2}{3}x \leq -2 \ | \cdot (-\frac{3}{2})$

$x \geq 3$

$L_b = [3 ; \infty[$



oder: $-\frac{2}{3}x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{2}{3}x \Leftrightarrow 3 \leq x \Leftrightarrow x \geq 3$

Lineare Gleichungssysteme

- Rückführen auf <u>eine</u> Gleichung mit <u>einer</u> <u>Variablen</u> durch <u>Elimination der anderen Variablen</u> (z.B. mit Einsetzverfahren)

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 2x - y & = & 3 \\ \text{II)} & x - 3y & = & -6 \end{array}}$$

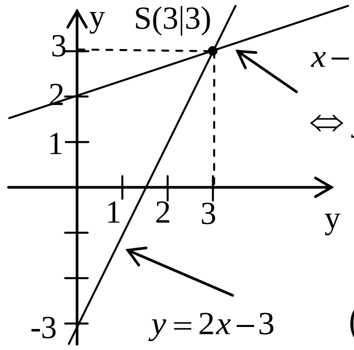
I) $\Rightarrow \quad y = 2x - 3 \quad (\text{I}')$

y in (II) : $x - 3(2x - 3) = -6$

…….. $\rightarrow x = 3$

x in I´ $\rightarrow y = 3$

$L = \{ (3 \mid 3) \}$



$x - 3y = -6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \quad (II')$

$y = 2x - 3 \quad (I')$

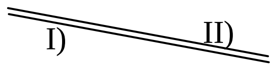
- Graphische Lösung

Jede Gleichung beschreibt eine Gerade. Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden stellen die Lösung des Gleichungssystems dar.

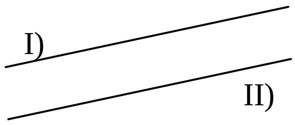
- Sonderfälle für das <u>allgemeine System</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I)}\ ax + by + c = 0 \\ \text{II)}\ dx + ey + f = 0 \end{array}}$$

a) Die beiden Geraden sind identisch $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Gleichungssystem ergibt allgemeingültige Gleichung $\Leftrightarrow$ $L = \{(x|y) \mid ax + by + c = 0\}$



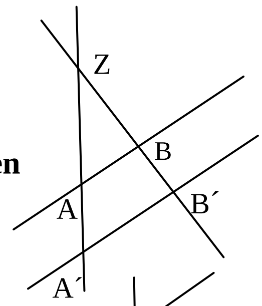
b) Die beiden Geraden sind parallel $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Gleichungssystem ergibt Widerspruch $\Leftrightarrow L = \{ \}$



- **<u>1. Strahlensatz:</u>**
Werden die zwei Geraden einer Geradenkreuzung von zwei **parallelen** Geraden geschnitten, dann **verhalten sich** zwei beliebige **Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden** genauso **wie die entsprechenden Abschnitte** auf der **anderen Kreuzungsgeraden.**

hier: $AB \parallel A'B' \Rightarrow \overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$

und $\overline{AA'} : \overline{ZA} = \overline{BB'} : \overline{ZB}$ usw.

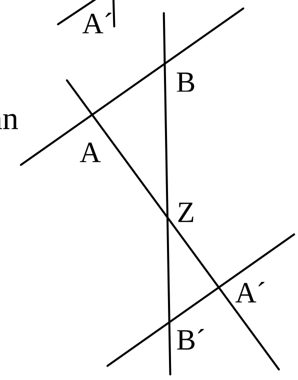


Bsp.1)
(zur "V-Figur")
$\overline{ZA'} = 8\text{cm}$,
$\overline{ZA} = 6\text{cm}$
$\overline{BB'} = 3\text{cm}$
$\overline{ZB} = ?$

[$\overline{ZB} = 9\text{cm}$]

- **<u>2. Strahlensatz:</u>**
Die ausgeschnittenen **Parallelstrecken verhalten sich** dann genauso **wie die Entfernungen entsprechender Streckenendpunkte zum Kreuzungspunkt.**

hier z.B.: $AB \parallel A'B' \Rightarrow \overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$



Bsp.2)
(zur „X-Figur")
$\overline{ZA'} = 5\text{cm}$,
$\overline{AA'} = 9\text{cm}$
$\overline{A'B'} = 7\text{cm}$
$\overline{AB} = ?$

[$\overline{AB} = 5{,}6\,\text{cm}$]

<u>Umkehrung des 1. Strahlensatzes:</u>
Verhalten sich zwei Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden genauso wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Kreuzungsgeraden, dann sind die zwei **schneidenden Geraden parallel**.

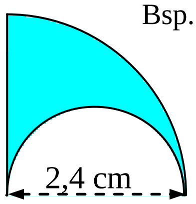
Ähnlichkeit

Zwei Figuren heißen **ähnlich**, wenn sie in allen entsprechenden Winkeln und im Verhältnis aller entsprechenden Seiten übereinstimmen.
Zwei **Dreiecke** sind z.B. bereits dann ähnlich, wenn sie in **zwei Winkeln** übereinstimmen.
In ähnl. Figuren gilt: entsprechende Strecken haben das **gleiche Längenverhältnis (k)**
entsprechende Flächen haben das **gleiche Flächenverhältnis (k^2 !)**

Kreis

- Flächeninhalt: **$A = r^2 \pi$**
- Umfang: **$U = 2\,r\,\pi$**

Bsp.: Berechne Flächeninhalt und Umfang der nebenstehenden Figur!



$$A = \frac{1}{4} \cdot (2{,}4\text{cm})^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (1{,}2\text{cm})^2 \cdot \pi = 0{,}72\text{cm}^2 \cdot \pi \approx 2{,}3\ \text{cm}^2$$

$$U = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2{,}4\text{cm} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2{,}4\text{cm} \cdot \pi + 2{,}4\text{cm} = 2{,}4\text{cm}\,(\pi + 1) \approx 9{,}9\text{cm}$$

Laplace – Wahrscheinlichkeit

Wenn alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, dann gilt für jedes Ereignis A:

$$\text{Wahrscheinlichkeit von A} = \frac{\text{Anzahl der für A } \textbf{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl } \textbf{aller möglichen} \text{ Ergebnisse}} \ ; \quad \text{kurz: } \boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{\Omega}|}}$$

Bsp.: In einer „Urne" befinden sich 6 grüne und 14 rote Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger einmaliger Ziehung eine rote Kugel zu ziehen?

[$\frac{14}{20} = 70\%$]

Gymnasium Stein	Wiederholungsaufgaben zum Grundwissenkatalog Mathematik der 8. Jahrgangsstufe

1) Vereinfache so weit wie möglich: a) $\frac{10x^3-35x^2}{105x-30x^2}$ b) $\frac{4}{4+x^2}$ c) $2x+\frac{4}{x}$ d) $2x:\frac{4}{x}$
(im Ergebnis höchstens 1 Bruchterm)

e) $\frac{2x}{9x+3}-\frac{2x-1}{6x+2}$ f) $\frac{a-3}{a^2-3a}\cdot\frac{2a}{a+3}$ g) $\frac{x-2}{x-x^2}+\frac{2+x}{x}$ h) $1-\frac{x-3}{x+2}:\frac{3-x}{x+2}$

i) $x^{-7}:x^{-4}+4\cdot x^{-3}\cdot x^{3}-\frac{1}{x^3}$ j) $(x+3)^{-2}-\frac{1}{x+3}$

2) Gegeben ist der Term $T(b)=\frac{3}{b-2}-\frac{1}{b}+1$ a) Vereinfache den Term! b) Berechne $T(-3)$!

3) Bestimme jeweils die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L über G = Q!

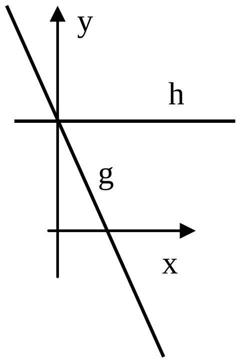
a) $\frac{x}{9}=x$ b) $\frac{9}{x}=x$ c) $\frac{9}{x}=0$ d) $\frac{x+1}{x-9}=0$ e) $\frac{x+1}{x-9}=2$ f) $\frac{x-3}{2}=x$

g) $(x^2-6x)\cdot(4x+8)=0$ h) $\frac{6}{x}+\frac{3}{5}=3$ i) $\frac{3}{2x}-\frac{7}{3}=\frac{1{,}5}{x}$ k) $\frac{2-x}{3+x}=\frac{3-x}{x}$

l) $\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}$ m) $\frac{3x}{2x-6}-\frac{3}{2}=\frac{4{,}5}{x-3}$ n) $\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2-2x}=\frac{3}{x-2}$ o) $\frac{3}{x^2-3x}=\frac{2}{x}$

4) Gegeben ist die Formel $P=\frac{U^2}{R}$. Wie verändert sich P *(möglichst genaue Angabe)*, wenn
a) U verdreifacht wird und R unverändert bleibt?
b) R verdreifacht wird und U unverändert bleibt?

5) Löse die Formel $a=\frac{f+k}{f\,b}$ nach jeder der 3 Variablen k, b und f auf !



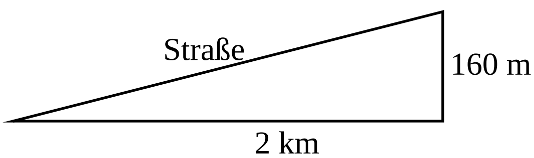
6) Welche der Gleichungen passt zur Geraden g, welche zur Geraden h ?
(im Bild rechts; gleiche Einheiten auf den Achsen)

a) $x=4$ b) $2x+y-4=0$ c) $y=4x+2$ d) $y=2x$
e) $x+2y-4=0$ f) $y=-2x+4$ g) $y=-x+1$ h) $y=2x-4$
i) $2y=8$ k) $y=-4x-2$

7) a) Zeichne die Geraden g und h in ein Koordinatensystem (Gerade g mit Steigungsdreieck):
g : $y=-0{,}6x-1{,}5$ h : $-4x+3y-12=0$
b) Bestimme mit Hilfe der Zeichnung die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen
I) $-0{,}6x-1{,}5<-1$ II) $-0{,}6x-1{,}5\geq 0$
Überprüfe deine Lösung durch Rechnung! *Lösungsmengen in Intervallschreibweise angeben!*

8) Bestimme jeweils eine **Gleichung für die folgenden Geraden g, h und f** :
a) **g** ist parallel zu der Geraden g´ mit der Gleichung $y=3x+7$ und geht durch den Punkt A (0 |2)
b) **h** ist parallel zu der Geraden h´ mit der Gleichung $2y+x=24{,}6$ und geht durch den Ursprung
c) **f** ist die x-Achse

9) Berechne die **Steigung der Straße** in der nebenstehenden Skizze! *(Angabe in Prozent; Skizze nicht maßstäblich!)*



10) Die Gerade g: $y=3x-2$ wird gespiegelt: a) an der y-Achse b) an der x-Achse c) am Ursprung
Gib jeweils die Gleichung der gespiegelten Geraden an! *(Skizze nicht verboten)*

11) Gegeben sind die Punkte P (7 | –25) , Q (–3 | 15) , R(100 | –399) und S(–12,5 | 53) .

a) Bestimme eine Gleichung für die Gerade g = PQ sowie ihre Schnittpunkte mit den Achsen!

b) Untersuche, ob R bzw. S auf (oder oberhalb oder unterhalb von) g liegt!

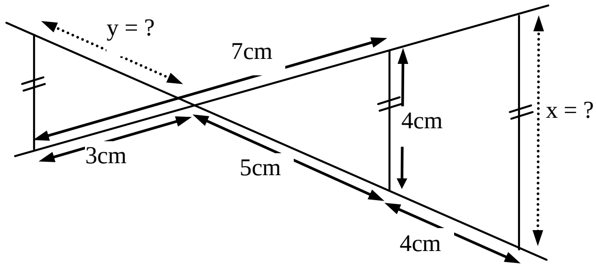
12) a) Zeichne die zwei Geraden g und h mit den Gleichungen g: $y = 2x - 1$ und h: $3y + 2x - 18 = 0$!

b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden und vergleiche mit der Zeichnung!

c) Spiegle die Gerade g an der Geraden h *(Zeichnung bzw. Konstruktion)* !

d) Gib die Gleichung einer Geraden durch den Ursprung an, die sich durch Spiegelung an g nicht verändert!

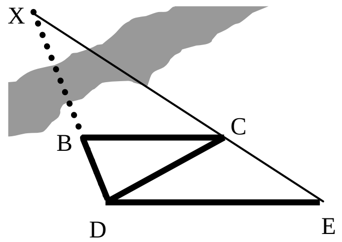
13) In der nebenstehenden Skizze *(nicht maßstabsgerecht)* sollen die mit || gekennzeichneten Strecken zueinander parallel sein.
Berechne die Streckenlängen x und y aus den angegebenen Maßen!



14) Berechne unter Verwendung geeigneter Streckenlängen die Entfernung $x = \overline{XB}$ des unzugänglichen Punktes X vom Punkt B!
(vgl. nebenstehende Skizze)
Es gilt dabei: [DE] || [BC]

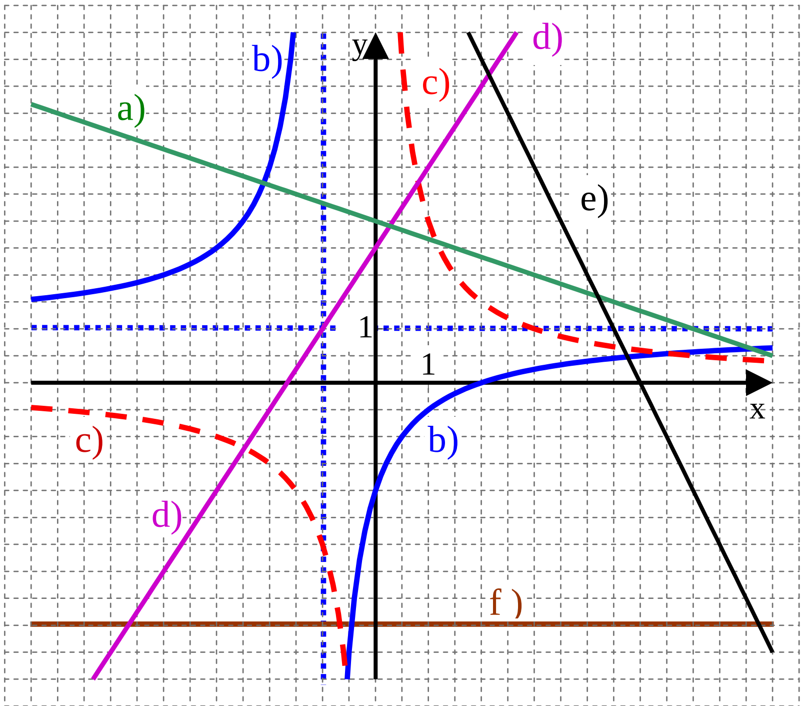
$\overline{BC} = 10m$; $\overline{BD} = 12m$

$\overline{DE} = 25m$; $\overline{DC} = 14m$



15) Die Familien Vielfraß und Dickbauch nutzen die Eröffnungsangebote beim Schnellrestaurant Mäcki. Familie Vielfraß vertilgt 5 Hamburger und 7 Portionen Pommes zusammen mit 5 Bechern Cola, Familie Dickbauch hat am Ende 7 Hamburger, 6 Portionen Pommes und 8 Becher Cola auf der Rechnung. Familie Dickbauch zahlt 22,10 €, Familie Vielfraß zahlt 18,20 €. Was ist für einen Hamburger bzw. für eine Portion Pommes zu bezahlen, wenn ein Becher Cola 80 Cent kostet?

16) Gib für jeden Funktionsgraphen im nebenstehenden Diagramm eine Funktionsgleichung an! *Hinweis: Die gepunkteten Geraden sind Asymptoten für den Graphen von b)*



17) Gegeben ist die Funktion h mit

$x \mapsto \frac{6+3x}{2x-3}$; $D = D_{max}$

a) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von h mit den Achsen!

b) Gib für alle Asymptoten des Graphen von h je eine Gleichung an!

c) Berechne den Funktionswert von h an der Stelle x = – 3 !
An welcher Stelle nimmt die Funktion den Wert 4 an?

d) Skizziere den Graphen von h unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse!

18) Gegeben sind die Funktionen f, g und h (Graphen: G_f, G_g und G_h) durch

$f(x) = \frac{1}{1-x}$; $g(x) = -2x + 1$ und $h(x) = x - 3$

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_g und G_h und die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f und G_g !

b) Überprüfe die Rechnung aus a) durch eine Zeichnung!

c) Löse die Gleichung $\frac{1}{1-x} = x - 3$ graphisch! Überprüfe das Ergebnis durch rechnerische Probe!

19) Martina hat die drei mündlichen Noten 4, 1 und 5. Wie viele Einser in Folge müsste sie bekommen, damit sie einen mündlichen Notendurchschnitt von 2,00 oder besser erreicht?
Löse mit einer Bruchgleichung!

20) Werner und Gudrun sind zusammen 83 Jahre alt. Vor vier Jahren war Werner eineinhalbmal so alt wie Gudrun. Wie alt sind beide jetzt? *Nachvollziehbarer Lösungsweg, Antwortsatz.*

21) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung und gib sie in Mengenschreibweise und Intervallschreibweise an: $19-(x-7)\cdot 2 \;<\; 15-3\cdot(x-4)$

22) Bestimme jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

a) I) $-3x + 5y + 20 = 0$
II) $2x - 6y + 8 = 0$

b) I) $\frac{1}{4}x = 5-3y$
II) $0{,}5x+3=8-2\cdot(3y-3)$

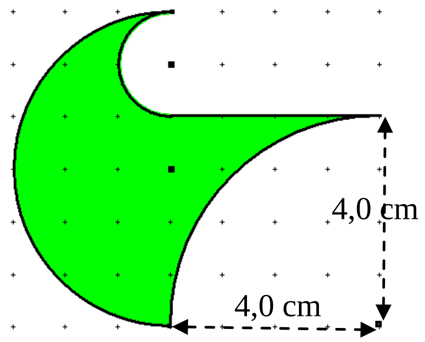
Welche geometrische Bedeutung hat die Lösungsmenge des Gleichungssystems b)?

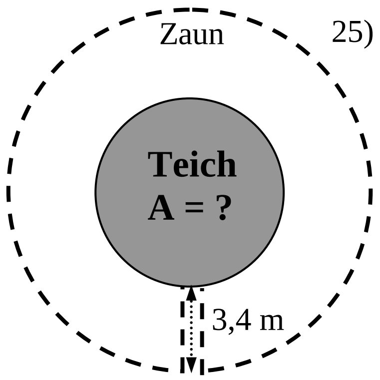
23) Setze für a, b, c, d und e geeignete Zahlen so ein, dass das **Gleichungssystem a) unendlich viele Lösungen** hat und das **Gleichungssystem b) die Lösung (0 | 0)** hat!

a) I) $7x - 3y + \boldsymbol{a} = 0$
II) $\boldsymbol{b}\,x + 15y + 6 = 0$

b) I) $2x + 3y + \boldsymbol{c} = 0$
II) $\boldsymbol{d}\,x + 3y + \boldsymbol{e} = 0$

24) Berechne Umfang und Flächeninhalt der rechts gezeichneten Figur aus den angegebenen Maßen! *Nachvollziehbarer Ansatz!*





25) Georg möchte den Flächeninhalt eines kreisrunden Teichs bestimmen. Da der Teich von einem Zaun umgeben ist, dessen Abstand zum Teich überall 3,4 m beträgt (messbar am Zugangsweg unten), misst Georg den Umfang des gesamten äußeren Zaunkreises (Zugangsweg weggedacht) mit einem langen Maßband und erhält dabei 94,6 m. Berechne aus diesen Angaben den gesuchten Flächeninhalt!

26) Ein Dreieck D_1 mit Grundlinie $g_1 = 5\text{cm}$ und Höhe $h_1 = 4\text{cm}$ ist ähnlich zu einem anderen Dreieck D_2 mit Flächeninhalt 90cm^2.
Berechne die Längen der entsprechenden Strecken g_2 und h_2 im Dreieck D_2 !

27) a) Für einen Goldwürfel mit Kantenlänge 2,00 cm wurde eine Masse von 154 g gemessen. Berechne daraus die Masse eines Goldwürfels mit Kantenlänge 3,00 cm !
b) Eine kreisrunde Kartonscheibe mit Radius 7,2 cm hat eine Masse von 8,1 g.
Welchen Radius hat eine Kreisscheibe aus dem gleichen Karton mit Masse 0,90 g ?

28) Aus dem Wort SPIEGELEI wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei a) ein G b) ein E c) ein I d) ein Konsonant gewählt wird?

29) Am Laplace-Gymnasium werden die Noten durch Würfeln (mit einem gewöhnlichen Würfel) ermittelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit *(Angabe in Prozent)* dafür, dass nach dieser Methode
a) in einer Klasse mit 20 Schülern und 16 Jungen alle Mädchen die Note 2 bekommen?
b) Simon und sein Banknachbar die gleiche Note bekommen?
c) Victoria, Schorschi und Micha lauter verschiedene Noten bekommen?

30) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus insgesamt 8 Fragen. Zu jeder Frage gibt es 4 mögliche Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Pia hat voll keine Ahnung und kreuzt deshalb völlig willkürlich jeweils eine der Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie
a) alle Antworten richtig b) alle Antworten falsch c) genau die ersten 3 Antworten richtig?