

Protokoll vom 18.12.13

Thema: Ableitung der Umkehrfunktion

Hausaufgaben vom 13.12.13

S.74 #1c: A=2,097

S.74 #4c: $F(x)=x\sin(x)-\cos(x)+c$

S.29 #9e: t=9,5

S.29 #9g: t=16

Ableitung der Umkehrfunktion

Bsp. 1: $f(x)=2x$

f: 1 → 2 eindeutig

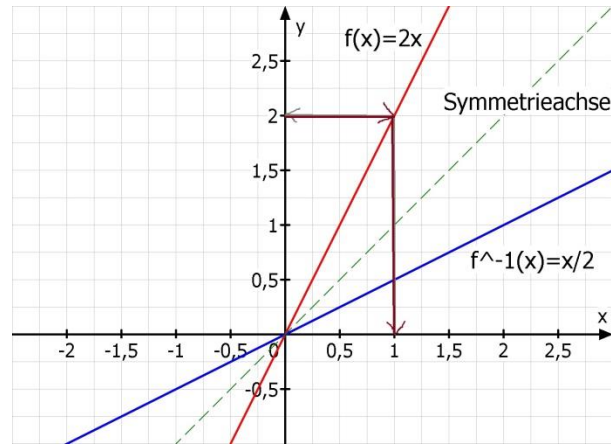
f: 2 → 1 eineindeutig (umkehrbar)

$$f(x)=2x=y \rightarrow x=\frac{y}{2} = f^{-1}(y)$$

Konvention (unabhängige Variable soll x sein)

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

$$P(1|2) \rightarrow P'(2|1)$$



Die Grafen von f und f^{-1} sind symmetrisch bzgl. Der Winkelhalbierenden.

$$f'(1)=2 \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{f'(1)}$$

Bsp. 2: $f(x)=x^2$

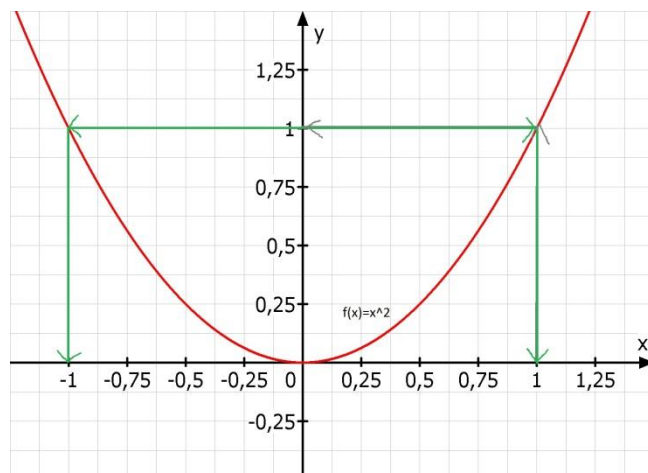
$y=4 \rightarrow 2$ und -2

f nicht eineindeutig (nicht umkehrbar)!

Daher muss Definitionsbereich eingeschränkt werden

- $D=R_0^+$

$$f(x)=x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$



Konvention

- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f(x)=x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$P(2|4) \rightarrow P'(4|2)$$

$$f'(2)=4 \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

→ Die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle x ist der Kehrwert der Ableitung der Funktion an der Stelle x.

Bsp. 3:

$$f(x)=e^x = y \rightarrow x = \ln(y) = f^{-1}(y)$$

→ umkehrbar, da f monoton wachsend

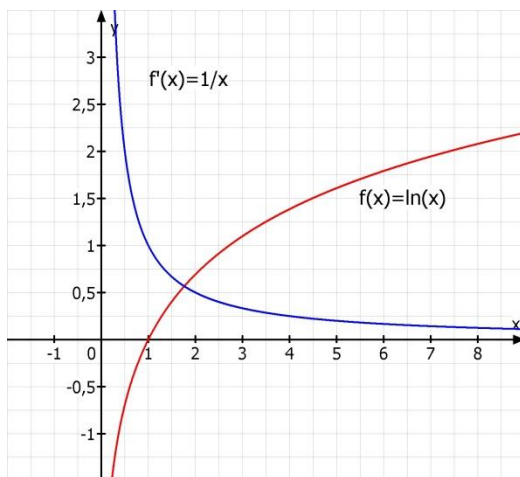
K.: $f^{-1}(x) = \ln(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$



- $f(x)=\ln(x)$ streng monoton wachsend $\rightarrow f'(x)>0$
- Der Graf von f wächst für kleine x sehr stark, deshalb hat die Ableitung sehr große Werte.
- Für große x wird die Steigung des ln immer kleiner, d.h. die Ableitung geht gegen 0.

ALLEN FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!!!