Stundenprotokoll
23.08.13
Anwendung Summenoperator, Beweis der Gauß-Formel durch Induktion

Beispiel: 1. n ist ungerade

$$\sum_{i=1}^{11} i=(1+11)+(2+10)+(3+9)+(4+8)+(5+7)+6=12*5+6=66$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i=(1+n)*(\frac{1+n}{2}-1)+\frac{(1+n)}{2} = (1+n)\left[\frac{1+n}{2}-1+\frac{1}{2}\right] = (1+n)*\left[\frac{1+n-2+1}{2}\right] = (1+n)*\frac{n}{2}$$

Damit haben wir bewiesen, dass die Gauß'sche Formel bei ungeraden Werten für n anwendbar ist.
Man konnte hier das Distributivgesetz als grundlegende Regel der Algebra anwenden
[a(b+c) = a*b+a*c] DG.
Es gibt aber auch einen anderen Weg zu beweisen, dass die Gauß'sche Formel bei ungeraden Werten für n gilt:

2. n ist ungerade (n-1 ist gerade)

$$\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n-1} i \ +n = n*(\frac{n-1}{2}+1) = n*(\frac{n-1+2}{2}) = n*(\frac{n+1}{2})$$

Man konnte hier das Assoziativgesetz anwenden [(a*b)*c = a*(b*c)] AG.

Dabei kann ein bestimmtes mathematisches Verfahren helfen eine Aussage zu beweisen, die für alle natürlichen Zahlen gilt, das sog. Verfahren der vollständigen Induktion:

1.) Zeige dass Deine Behauptung/Aussage für ein Beispiel stimmt

A(n): $\sum_{i=1}^{n} i=(1+n)*\frac{n}{2}$ für n = 2 → $1+2=(1+2)*\frac{2}{2}=3$ → Die Aussage stimmt

2.) Zeige nun, dass deine Aussage auch z.B. für n + 1 gilt, wenn du weißt dass sie für n gilt
A(n) → A(n+1)

3.) Daraus lässt sich folgern, dass es für jede natürlichen Zahl von n gilt.

A(n) $\sum_{i=1}^{n} i=(1+n)*\frac{n}{2}$

A(n+1) $\sum_{i=1}^{n+1} i=(1+n+1)*\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}*(n+2)*(n+1)$ → müsste gelten

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i=\sum_{i=1}^{n} i+n+1 = (1+n)*\frac{n}{2}+n+1 = \frac{1}{2}*(n+1)*(n+2) \quad \text{q.e.d.}$$

Im weiteren Verlauf des Unterrichts wurde dieses Verfahren für alle Beweise für die Summe der Quadrate angewendet.

Marius Levin Thomas, 25.08.2013