1 Nachweis der Eindeutigkeit der Division mit Rest

von Florian Heinrich

Seien $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$, so lässt sich eine Zahl a in kein, ein oder mehrere Bündel $q * b$ und einen nicht zwingend auftretenden Rest r aufteilen, wobei gilt, dass $q, r \in \mathbb{N}_0$ und $r < b$.

$$a = q * b + r$$

Sollte es eine Alternativdarstellung von a mit gleicher Bündelung geben:

$$a = q' * b + r'$$

Wobei $r' < b$ gilt, so muss $q \neq q'$ und $r \neq r'$ gelten. Andernfalls gleichen sich beide Darstellungen, welche somit eindeutig ist.

Angenommen es gibt zwei Darstellungen $a = q * b + r$ und $a = q' * b + r'$ für die gilt $q' \geq q$, dann:

$$\begin{aligned} a = q * b + r \quad &= q' * b + r' \\ q * b + r \quad &= q' * b + r' \\ (q' - q) * b \quad &= r - r' \end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass gilt $r - r' \leq r < b$ lässt sich die Gleichung in eine Ungleichung umformen:

$$(q' - q) * b < b$$

Es gilt wiederum, dass $q' - q \in \mathbb{N}_0$ gelten muss, da nach obigen gegebenen Eigenschaften $q' \geq q$ und $q', q \in \mathbb{N}_0$ gilt. Somit ergibt sich folgender Zusammenhang, da nur für $0 \in \mathbb{N}_0$ als Ergebnis der Differenz die Ungleichung gelöst werden kann.

$$(q' - q) = 0$$

Aufgrund dessen lässt sich abschließend folgern, dass gelten muss

$$q' = q$$

und direkt daraus kann angegeben werden, dass auch

$$r' = r$$

gelten muss, da sonst die Gleichung nach der ersten Umformung nicht erfüllt wäre.