Thema: Anwendung der Logarithmusfunktion und der partiellen Integration

Als erstes haben wir Übungen zum Ableiten des natürlichen Logarithmus gelöst.

S.32 2f:

$f(x) = \ln\left(\frac{t}{x}\right)$ $\quad\quad$ $f'(x) = \frac{x}{t} \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$

S.32 3g:

$f(x) = \sin(\ln(x))$ $\quad\quad$ $f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

In die partielle Integration sind wir mit dem Kosinus eingestiegen.

$$\int (\cos(x))^2\, dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (\sin(x))^2\, dx$$

Damit man das zweite Integral lösen kann, nimmt man sich $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$ zur Hilfe. Dies kann man mit Hilfe des Satzes des Pytagoras zeigen.

$$\begin{aligned} \int (\cos(x))^2\, dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - (\cos(x))^2)\, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1\, dx - \int (\cos(x))^2\, dx \end{aligned}$$

$$2 \int (\cos(x))^2\, dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x$$

$$\int (\cos(x))^2\, dx = \frac{\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2} = F(x)$$

Probe: $F'(x) = \frac{1}{2}((\cos(x))^2 + 1 - (\sin(x))^2) = \frac{1}{2}(2(\cos(x))^2) = (\cos(x))^2 = f(x)$

Wir fanden durch partielle Integration die Stammfunktion des natürlichen Logarithmus heraus.

$$\int \ln(x)\, dx = \int 1 \cdot \ln(x)\, dx$$

$$\boxed{\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - \int 1\, dx = x \cdot \ln(x) - x = F(x)}$$

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x)$$

Danach haben wir noch partiell Integriert (S. 74 Nr. 8a, b, d).

Nr. 8a:

$$\int x \cdot \ln(x)\, dx$$

$g'(x) = \ln(x)$ $\quad\quad$ $g(x) = x \cdot \ln(x) - x$

$h(x) = x$ $\quad\quad$ $h'(x) = 1$

$$\int x \cdot \ln(x)\, dx = x \cdot (\, x \cdot \ln(x) - x) - \int \, (x \cdot \ln(x) - x)\, dx$$
$$= x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - \int x \cdot \ln(x)\ \, dx + \int x\, dx$$

$$2 \int x \cdot \ln(x)\, dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 + \frac{x^2}{2} = x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C = F(x)$$

$$F'(x) = x\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = x\ \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x\ \ln(x) = f(x)$$

Nr. 8d:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$$

$g'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad\quad$ $g(x) = \ln(x)$

$h(x) = \ln(x)$ $\quad\quad$ $h'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx =$$

$$2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = (\ln(x))^2$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C = F(x)$$

$$F'(x) = \frac{2 \ln(x)}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = f(x)$$

Bei dieser Aufgabe konnte man nicht wie bei den anderen Aufgaben ln(x) als g‘(x) nehmen, da man sonst nicht weiter kommt. Aber man hatte wie bei den anderen Aufgaben auch, auf beiden Seiten das gleiche Integral.

Hausaufgaben für den 17.01.

S. 32 Nr. 2h, 3f, 5, 6, 7a, (10, 11),13h

S. 74 Nr. 8c

Für die Hausaufgabe 8c:

$$\int (x^2 \cdot \ln(x)) dx = \frac{x^3}{3} (\ln(x) - \frac{1}{3})$$