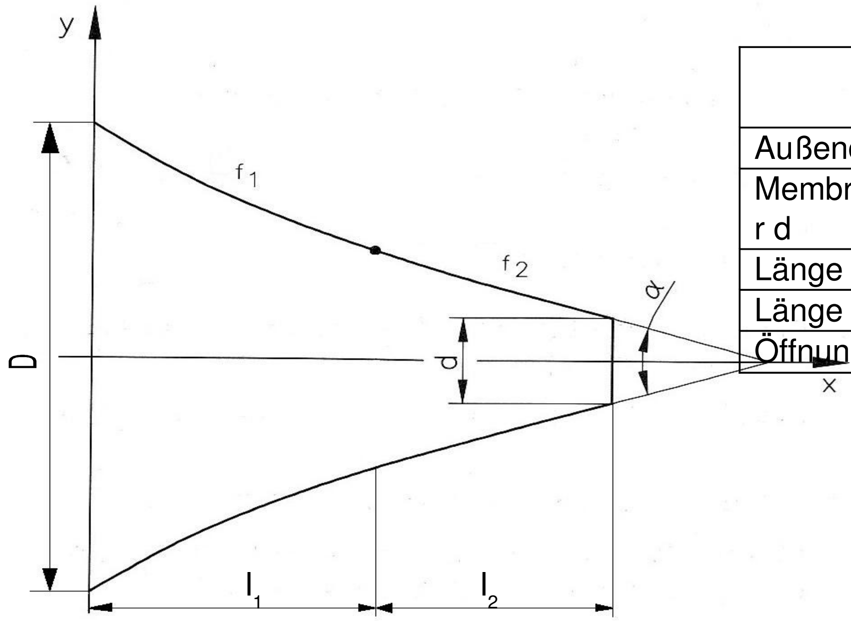
Schalltrichter (Birmes)

Bei einem Schalltrichter (siehe unmaßstäbliche Skizze) hat die Mantellinie auf der Länge l_1 die Form des Graphen einer e-Funktion f_1 und im glatten Übergang daran anschließend auf der Länge l_2 die Form des Graphen einer Geraden f_2.



Datentabelle zum Schalltrichter	
Außendurchmesser D	
Membrandurchmesser d	3 cm
Länge l_1	15 cm
Länge l_2	5 cm
Öffnungswinkel α	20°

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden f_2 und die der e-Funktion f_1 in der Form $f_1(x)=ae^{bx}$. Ergänzen Sie die Datentabelle zum Schalltrichter um die Angabe des Außendurchmessers D.
Kontrollergebnisse: $f(x) = 7{,}222\ e$ $\quad f(x) = -0{,}176\,x + 5{,}02$

b) Die Schallintensität des Schalltrichters wird mithilfe der Längsschnittsfläche des Trichters geschätzt. Ermitteln Sie die gesamte Längsschnittsfläche.

c) Für die genaue Berechnung der Schallintensität wird das Volumen des Trichters benötigt.

Endergebnisse:
a) D = 14,444 cm
b) A = 150,264 cm²
c) V = 1047,143 cm³

MIES-VAN-DER-ROHE-SCHULE

Berufskolleg für Technik des Schulverbandes
in der StädteRegion Aachen

Lösung zum Schalltrichter:

a) $f_2(x) = mx + b$

$m = -\tan \frac{\alpha}{2} = -0{,}176$

$f_2(20) = -0{,}176 \cdot 20 + b = 1{,}5$

$\Leftrightarrow \quad b = 5{,}02$

$f_2(x) = -0{,}176x + 5{,}02 \qquad D = [15; 20]$

$f_1(x) = a \cdot e^{bx}$

$f_1'(15) = -\tan \frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow a \cdot b \cdot e^{b \cdot 15} = -0{,}176$

$f_1(15) = f_2(15)$

$\Leftrightarrow a \cdot e^{b \cdot 15} = -0{,}176 \cdot 15 + 5{,}02$

$a \cdot b \cdot e^{b \cdot 15} = -0{,}176$

$\wedge \; a e^{b \cdot 15} = 2{,}38$

$b \cdot 2{,}38 = -0{,}176$

$\wedge \; a \cdot e^{b \cdot 15} = 2{,}38$

$b = -0{,}074$

$\wedge \; a = 7{,}222$

$f_1(x) = 7{,}222 \cdot e^{-0{,}074x} \qquad D = [0; 15]$

$D = 2 \cdot f_1(0) = 2 \cdot 7{,}222 = 14{,}444$

b) $A = \left[\int_0^{15} f_1(x)\,dx + \int_{15}^{20} f_2(x)\,dx\right] \cdot 2$

$= \left[\left[\frac{7{,}222}{-0{,}074} e^{-0{,}074x}\right]_0^{15} + \left[\frac{-0{,}176}{2}x^2 + 5{,}02x\right]_{15}^{20}\right] \cdot 2$

$= \left[(-32{,}163 + 97{,}595) + (65{,}2 - 55{,}5)\right] \cdot 2$

$= (65{,}432 + 9{,}7) \cdot 2$

$= 150{,}264$

c)

$$V = \int_0^{15} \pi \left(f_1(x)\right)^2 dx + \int_{15}^{20} \pi \left(f_2(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{15} \pi \cdot \left(7{,}222 \cdot e^{-0{,}074x}\right)^2 dx + \int_{15}^{20} \pi \left(-0{,}176x + 5{,}02\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{15} \pi \cdot 7{,}222^2 \cdot e^{-0{,}074x \cdot 2} dx + \int_{15}^{20} \pi \left(0{,}176^2 x^2 - 2 \cdot 5{,}02 \cdot 0{,}176x + 5{,}02^2\right) dx$$

$$= \int_0^{15} 52{,}157\pi \cdot e^{-0{,}148x} dx + \int_{15}^{20} 0{,}031\pi x^2 - 1{,}767\pi x + 25{,}2\pi \, dx$$

$$= \left[\frac{52{,}157\pi}{-0{,}148} e^{-0{,}148x}\right]_0^{15} + \left[\frac{0{,}031\pi}{3} x^3 - \frac{1{,}767\pi}{2} x^2 + 25{,}2\pi x\right]_{15}^{20}$$

$$= (-120{,}245 + 1107{,}135) + (732{,}829 - 672{,}576)$$

$$= 986{,}89 + 60{,}253$$

$$= 1047{,}143$$