Das klassische (vierstufige) Runge-Kutta-Verfahren

Motivation

Das Euler-Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Anfangswertproblemen hat hauptsächlich theoretische Bedeutung. Wendet man es praktisch an, so erweist sich seine „Einseitigkeit“ als Nachteil: Beim Versuch, den Verlauf der Lösungskurve für $x_n \leqq x \leqq x_{n+1}$ (mit $x_{n+1} = x_n + h$) möglichst genau herauszufinden, dient als Grundlage die Richtung des gegebenen Richtungsfeldes im Punkt $(x_n|y_n)$ – einem Punkt am Rande des betrachteten Intervalls $[x_n, x_{n+1}]$.

Die Runge-Kutta-Verfahren versuchen, das Richtungsfeld in mehreren Punkten (*Knoten*) des Streifens $x_n \leqq x \leqq x_{n+1}$ mit einzubeziehen. Im Folgenden wird an einem Beispiel der erste Schritt des klassischen (vierstufigen) Runge-Kutta-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 1$ demonstriert.

Beispiel

Gesucht ist eine Funktion f, die die Gleichung $f'(x) = x \cdot f(x)$ und die Anfangsbedingung $f(1) = 1$ erfüllt.

Dieses Problem lässt sich exakt lösen: $f(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)}$

Die zugehörige Lösungskurve ist grün dargestellt.

Die Anfangsbedingung entspricht dem Knoten $\mathrm{P}_{11}(1|1)$; die Näherung beginnt demnach mit $x_{11} = x_0 = 1$ und $y_{11} = y_0 = 1$.

Die Steigung des Richtungsfeldes in diesem Punkt ist $k_{11} = x_{11} \cdot y_{11} = 1 \cdot 1 = 1$.

Der zweite Knoten P_{12} soll die x-Koordinate $x_{12} = x_0 + \frac{1}{2}h = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1{,}5$ haben und auf der Geraden liegen, die durch den Punkt P_{11} und die Steigung k_{11} bestimmt ist. Für die y-Koordinate von P_{12} ergibt sich daher:

$y_{12} = y_0 + k_{11} \cdot \frac{1}{2}h = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1{,}5$

Die Steigung des Richtungsfeldes in P_{12} beträgt $k_{12} = x_{12} \cdot y_{12} = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$.

Der dritte Knoten P_{13} soll dieselbe x-Koordinate wie P_{12} besitzen: $x_{13} = 1{,}5$

Die y-Koordinate ergibt sich aus der Bedingung, dass P_{13} auf der Geraden liegen soll, die durch den Punkt P_{11} und die Steigung k_{12} festgelegt ist.

$y_{13} = y_0 + k_{12} \cdot \frac{1}{2}h = 1 + 2{,}25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2{,}125$

Aus dem gegebenen Richtungsfeld ergibt sich die zugehörige Steigung:

$k_{13} = x_{13} \cdot y_{13} = 1{,}5 \cdot 2{,}125 = 3{,}1875$.

Der vierte und letzte Knoten P_{14} dieses Runge-Kutta-Schritts soll am rechten Rand des betrachteten Streifens liegen und somit die x-Koordinate $x_{14} = x_0 + h = x_1$ besitzen. Des Weiteren soll P_{14} auf der Geraden liegen, die durch den Punkt P_{11} und die Steigung k_{13} bestimmt ist.

$y_{14} = y_0 + k_{13} \cdot h = 1 + 3{,}1875 \cdot 1 = 4{,}1875$

Auch hier wird die zugehörige Steigung ermittelt: $k_{14} = x_{14} \cdot y_{14} = 2 \cdot 4{,}1875 = 8{,}375$

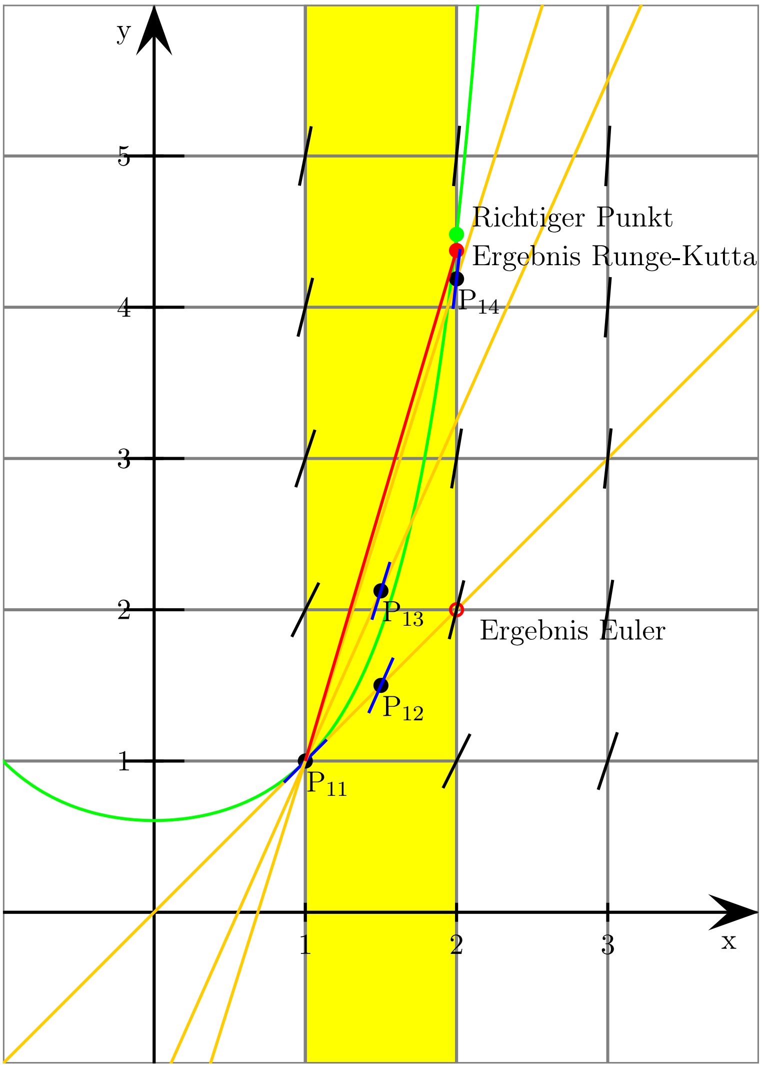
Von den vier Steigungen k_{11}, k_{12}, k_{13} und k_{14} wird nun ein gewichteter Durchschnittswert k_1 gebildet; dabei zählen die Steigungen k_{12} und k_{13} doppelt, da die entsprechenden Knoten im Inneren des betrachteten Streifens liegen.

$k_1 = \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) = \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 2{,}25 + 2 \cdot 3{,}1875 + 8{,}375) = 3{,}375$

Der gerade berechnete Wert von k_1 dient dazu, den neuen Punkt $(x_1|y_1)$ der Runge-Kutta-Näherung zu berechnen. Dieser Punkt hat die x-Koordinate $x_1 = x_0 + h = 1 + 1 = 2$ und liegt auf der Geraden, die durch den Punkt P_{11} und die Steigung k_1 festgelegt ist.

$y_1 = y_0 + k_1 \cdot h = 1 + 3{,}375 \cdot 1 = 4{,}375$

Angesichts der großen Schrittweite $h = 1$ ist das ein recht guter Näherungswert. Exakt wäre $y_1 = e^{\frac{1}{2}(2^2 - 1)} = e\sqrt{e} \approx 4{,}48169$. Eine ausgesprochen schlechte Näherung würde dagegen das Euler-Verfahren mit $h = 1$ liefern, nämlich $y_1 = 2$.



Beschreibung des Algorithmus

Differenzialgleichung:	$f'(x) = r(x, f(x))$
Anfangsbedingung:	$f(x_0) = y_0$
Schrittweite:	h (kann auch negativ sein)
Zahl der Schritte:	n

Wiederhole für $i = 1$ bis $i = n$ folgende Berechnungen:

$$x_{i1} = x_{i-1}; \qquad y_{i1} = y_{i-1}; \qquad k_{i1} = r(x_{i1}, y_{i1});$$
$$x_{i2} = x_{i1} + \tfrac{1}{2}h; \qquad y_{i2} = y_{i1} + k_{i1} \cdot \tfrac{1}{2}h; \qquad k_{i2} = r(x_{i2}, y_{i2});$$
$$x_{i3} = x_{i1} + \tfrac{1}{2}h; \qquad y_{i3} = y_{i1} + k_{i2} \cdot \tfrac{1}{2}h; \qquad k_{i3} = r(x_{i3}, y_{i3});$$
$$x_{i4} = x_{i1} + h; \qquad y_{i4} = y_{i1} + k_{i3} \cdot h; \qquad k_{i4} = r(x_{i4}, y_{i4});$$
$$k_i = \tfrac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4});$$
$$x_i = x_{i4}; \qquad y_i = y_{i1} + k_i \cdot h$$

Quellen

Josef Stoer, Roland Bulirsch, Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

`de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren`, abgerufen am 13. Juni 2011

Walter Fendt, 14. Juni 2011