

Thema: Wiederholung der Logarithmusfunktion und der partiellen Integration

Als erstes haben wir Übungen zum Ableiten des natürlichen Logarithmus gelöst.

S.32 2f:

$$f(x) = \ln\left(\frac{t}{x}\right) \qquad f'(x) = \frac{x}{t} \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$$

S.32 3g:

$$f(x) = \sin(\ln(x)) \qquad f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

In die partielle Integration sind wir mit dem Kosinus eingestiegen.

$$\int (\cos(x))^2 dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (\sin(x))^2 dx$$

Damit man das zweite Integral lösen kann, nimmt man sich den Satz des Pythagoras zur Hilfe.

$$\begin{aligned} \int (\cos(x))^2 dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - (\cos(x))^2) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 dx - \int (\cos(x))^2 dx \end{aligned}$$

$$2 \int (\cos(x))^2 dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x$$

$$\int (\cos(x))^2 dx = \frac{\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2}$$

Wir fanden durch partielle Integration die Stammfunktion des natürlichen Logarithmus heraus.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(x) - x$$

Danach haben wir noch partiell integriert (S. 74 Nr. 8a, b, d).

Nr. 8a:

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

$$g'(x) = \ln(x) \qquad g(x) = x \cdot \ln(x) - x$$

$$h(x) = x \qquad h'(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x) dx &= x \cdot (x \cdot \ln(x) - x) - \int (x \cdot \ln(x) - x) dx \\ &= x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - \int x \cdot \ln(x) dx + \int x dx \end{aligned}$$

$$2 \int x \cdot \ln(x) dx = x^2 \cdot \ln(x) - x^2 + \frac{x^2}{2} = x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + C$$

Nr. 8d:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx =$$

$$2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = (\ln(x))^2$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C$$

Hausaufgaben für den 17.01.

S. 32 Nr. 2h, 3f, 5, 6, 7a, (10, 11), 13h

S. 74 Nr. 8c

Für die Hausaufgabe 8c:

$$\int (x^2 \cdot \ln(x)) dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right)$$