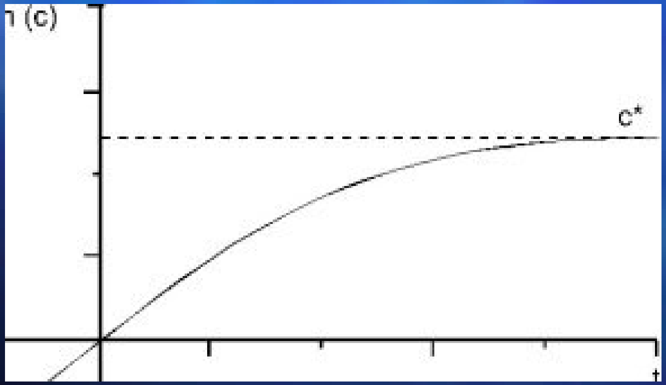
Logistisches Wachstum



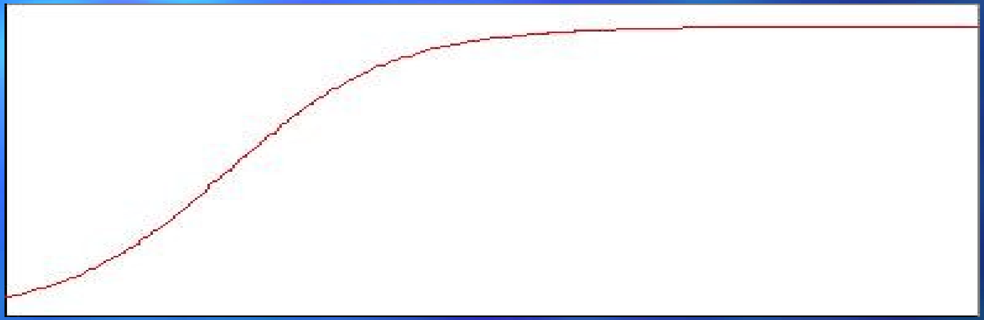
Projekt von Simon Landsberg, Friederike Thun und Katharina Schellhaus

an der Stormarnschule Ahrensburg

Logistisches Wachstum - Herleitung

- Beispiele für logistisches Wachstum:

  Zahl der Handys und viele „natürliche“ Wachstumsvorgänge, wie Bakterienwachstum

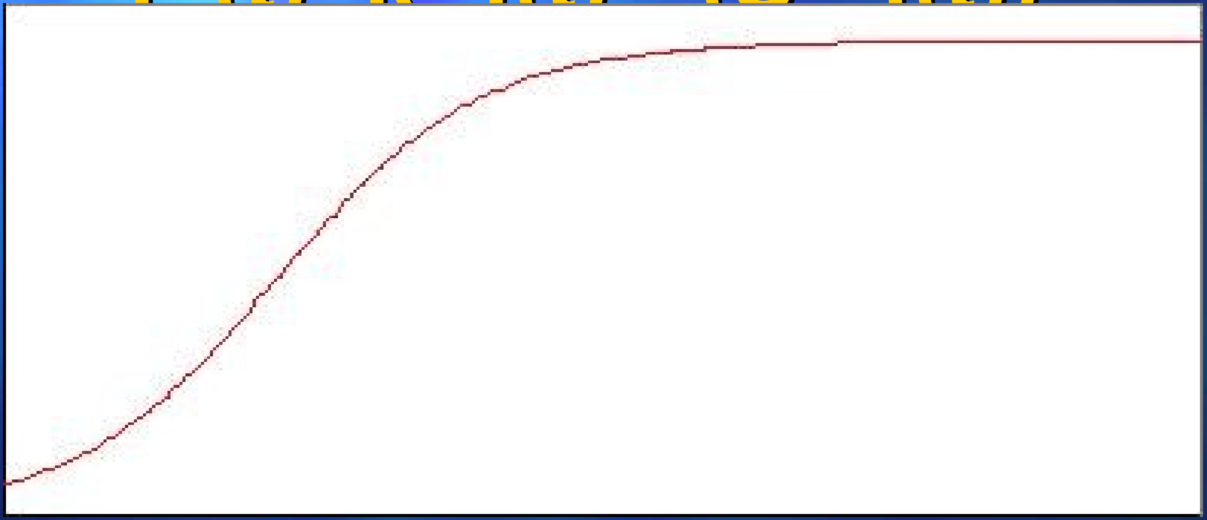


- verläuft erst exponentiell, verlangsamt sich dann aber und kommt zum Erliegen, wenn die Sättigungsgrenze erreicht ist

Logistisches Wachstum - Herleitung

- Die Differentialgleichung muss also sein:

$$f'(t)=k\cdot f(t)\cdot(S-f(t))$$



Logistisches Wachstum - Herleitung

f'(t)=k*f(t)*(S-f(t))

k>0 und S>0

1. $$\frac{f'(t)}{f(t)*(S-f(t))} = k$$

2. $$\frac{f'(t)}{f(t)*S} + \frac{f'(t)}{(S-f(t))*S} = k$$

Logistisches Wachstum - Herleitung

Erklärung:

$$\frac{f'(t)}{f(t)*(S-f(t))}$$

$$=\frac{S*f'(t)}{f(t)*(S-f(t))*S}$$

$$=\frac{S*f'(t)-f'(t)*f(t)+f'(t)*f(t)}{f(t)*(S-f(t))*S}$$

$$=\frac{f'(t)*(s-f(t))}{f(t)*(S-f(t))*S}+\frac{f'(t)*f(t)}{f(t)*(S-f(t))*S}$$

$$=\frac{f'(t)}{f(t)*S}+\frac{f'(t)}{(S-f(t))*S}$$

Logistisches Wachstum - Herleitung

- 3. $$\frac{f'(t)}{S*f(t)} + \frac{f'(t)}{S*(S-f(t))} = \frac{f'(t)}{S*f(t)} - \frac{-f'(t)}{S*(S-f(t))} = k$$

- 4. $$\frac{1}{S}\ln(f(t)) - \frac{1}{S}\ln(S-f(t)) = kt + c_1$$

- 5. $$\ln\left(\frac{S-f(t)}{f(t)}\right) = -Skt - Sc_1$$

Logistisches Wachstum - Herleitung

- 6. $$\frac{S - f(t)}{f(t)} = e^{-Skt - Sc_1}$$ $$c_2 = e^{-Sc_1}$$
- 7. $$\frac{S - f(t)}{f(t)} = c_2 * e^{-Skt}$$
- 8. $$\frac{S}{f(t)} - 1 = c_2 * e^{-Skt}$$

Logistisches Wachstum - Herleitung

- 9. $$\frac{S}{f(t)} = c_2 * e^{-Skt} + 1$$

- 10. $$\frac{S}{c_2 * e^{-skt} + 1} = f(t)$$

$$f(t) = \frac{S}{c_2 * e^{-skt} + 1}$$

Logistisches Wachstum - Herleitung

a=Anfangsbestand dann ist f(t) :

$$f(0)=\frac{S}{1+c_2}=a$$

$$S=(1+c_2)*a$$

$$c_2=\frac{S}{a}-1=\frac{S-a}{a}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{S}{1+\frac{S-a}{a}*e^{-skt}}=\frac{S*a}{a+(S-a)*e^{-skt}}}$$

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- **Beispielaufgabe:**

Auf einer einsamen Karibikinsel, abgeschnitten von der Außenwelt, da sie bis jetzt weder entdeckt wurde, noch je von einem Bewohner verlassen wurde(die Bewohner können nicht schwimmen) breitet sich epidemieartig eine Krankheit aus, die stark ansteckend ist.

Auf der Insel leben 8000 Menschen. Zuerst hatte sich nur ein alter Mann durch einen Zugvogel, den er gedankenlos gegessen hatte, infiziert. Nach 4 Tagen waren es jedoch schon 250 Kranke.

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- **a)Bilde die Funktionsgleichung!**
- **b)Wann sind alle Bewohner infiziert?**
- **c)Wann sind 5000 Menschen infiziert?**
- **d)Wie viele Menschen sind nach 10 Tagen infiziert?**

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- **a)Da zunächst nur ein Bewohner infiziert war, ist a=1. Da die Krankheit höchst ansteckend ist und keiner gegen sie resistent ist, wird kein Bewohner verschont bleiben, also ist S=8000. (t in Tagen)**

Zur Erinnerung:

$$f(t) = \frac{S}{1 + \frac{S - a}{a} * e^{-skt}} = \frac{S * a}{a + (S - a) * e^{-skt}}$$

$$f(t) = \frac{1 * 8000}{1 + (8000 - 1) * e^{-8000*k*t}}$$

$$f(4) = 250$$

$$250 = \frac{8000}{1 + (8000 - 1) * e^{-8000*k*4}}$$

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

$$1 + 7999 * e^{-32000*k} = \frac{8000}{250}$$

$$7999 * e^{-32000*k} = 31$$

$$e^{-32000*k} = 0{,}00388$$

$$-32000 * k = \ln(0{,}00388)$$

$$k = 1{,}735 * 10^{-4}$$

$$f(t) = \frac{8000}{1 + 7999 * e^{-1{,}388*t}}$$

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- b)

$$8000 = \frac{8000}{1 + 7999 * e^{-1,388*t}}$$

$$0 = 7999 * e^{-1,388*t}$$

$$0 = e^{-1,388*t}$$

Hier liegt ein Problem beim logistischen Wachstum. Der Funktionswert wird nie gleich dem Sättigungswert sein, da er sich diesem nur annähert. Deswegen lässt sich auf diese Weise nicht ermitteln, wann alle infiziert sind.

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- Es wird also mit dem Wert 7999 gerechnet, da dann praktisch alle Menschen infiziert sind:

$$7999 = \frac{8000}{1 + 7999 * e^{-1,388*t}}$$

$$7999 * e^{-1,388*t} = 1,25 * 10^{-4}$$

$$e^{-1,388*t} = 1,56 * 10^{-8}$$

$$t = 12,95$$

Antwort: Nach ca. 13 Tagen ist die ganze Bevölkerung infiziert.

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- c)

$$5000 = \frac{8000}{1 + 7999 * e^{-1,388*t}}$$

$$1 + 7999 * e^{-1,388*t} = 1,6$$

$$e^{-1,388*t} = \frac{0,6}{7999}$$

$$-1,388 * t = -9,4979$$

$$t = 6,843$$

Antwort: Nach ca. 7 Tagen sind 5000 Menschen infiziert.

Logistisches Wachstum - Beispielaufgabe

- d)

$$f(10) = \frac{8000}{1 + 7999 * e^{-13,88}} = 7940,45$$

Antwort: Nach 10 Tagen sind 7940 Menschen infiziert.