OBERMAYR EUROPA-SCHULE

Musterlösung der Musterklausur

Fach:	***Mathematik***	Themen:	***Differenzialgleichungen***
Datum:	***03. April 2011***	Protokoll:	***Catalina Vetter***
Lehrer:	***C. Schmitt***	Jgst. / Kurs:	***Leistungskurs 13***

#1

a)

$f(0) = 1$

Am Anfang muss das Gerücht eine Person kennen, was bedeutet, dass zum Zeitpunkt t=0 f(t)=1 sein muss, da f(t) die Anzahl der Personen, die das Gerücht bereits kennen, in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.

$f(1) = 1{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$

$f(2) = f(1) \cdot 1{,}2 = 1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}2^2$

Allgemein:

$f(t) = 1{,}2^t$

Wenn alle 50 000 Personen der Stadt das Gerücht kennen sollen, muss der Funktionswert f(t)= 50 000 sein.

$f(t) = 50\,000$

$50000 = 1{,}2^t$

$\ln 50\,000 = t \cdot \ln 1{,}2$

$$\frac{\ln 50\,000}{\ln 1{,}2} = t$$

$t = 59{,}34$

Nach ca. 60 Wochen kennt also jeder Einwohner der Stadt das Gerücht.

---

b)

$f(0) = K$

Zum Zeitpunkt t=0 ist K der Geldwert, welcher nach einem Jahr auf 0,974K gesunken ist.

$f(1) = K - K \cdot 0{,}026$

$$= 0{,}974 \cdot K$$

$$f(2) = 0{,}974 \cdot K - 0{,}974 \cdot K \cdot 0{,}026$$
$$= 0{,}974 \cdot K(1 - 0{,}026)$$
$$= 0{,}974 \cdot K \cdot 0{,}974$$
$$= K \cdot (0{,}974)^2$$

Allgemein lässt sich das ausdrücken als:

$$f(t) = K \cdot (0{,}974)^t$$

$$nach\ 8\ Jahren: t = 8$$

$$f(8) = K \cdot (0{,}974)^8 = 0{,}80998 \cdot K$$
$$f(0) - f(8) = K - 0{,}80998 \cdot K = 0{,}19 \cdot K$$

Das Geld hat nach 8 Jahren also 19% an Wert verloren.

#2

$$f_4(x) = 2e^{3x}$$

$$f_4'(x) = 6e^{3x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

$$6e^{3x} = 3 \cdot 2e^{3x}$$

$$6e^{3x} = 6e^{3x}$$

#3

$$f'(x) = -2 \cdot f(x)$$

$f(x) = K \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = -2K \cdot e^{-2x}$

$f(0) = 2$

$K \cdot e^{-2 \cdot 0} = 2$

$K \cdot e^{0} = 2$

$K = 2$

Die Bedingung f (0) = 2 wird von der Funktion $f(x) = 2e^{-2x}$ erfüllt.

#4

a)

$f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}$

$f'(x) \cdot f(x) = -x$

$\int f'(x) \cdot f(x)\, dx = -\int x \; dx$

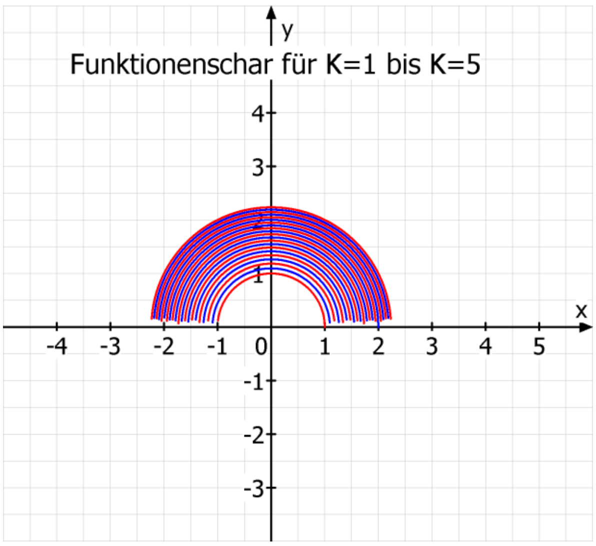
$g(x) = f(x) \qquad g'(x) = f'(x)$

$h(z) = z \qquad H(z) = \dfrac{1}{2} z^2$

$\dfrac{1}{2}\left(f(x)\right)^2 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C$

$\left(f(x)\right)^2 = -x^2 + 2C$

$f(x) = \sqrt{K - x^2}$



b)

$$f'(x) = -\frac{3f(x)}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln f(x) = -3 \cdot \ln x$$

$$e^{\ln f(x)} = e^{-3 \cdot \ln x}$$

$$f(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{-3}$$

$$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

---

c)

$$xf'(x) - 3 = f(x)$$

$$xf'(x) = f(x) + 3$$

$$f'(x) = \frac{f(x) + 3}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x) + 3} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x) + 3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln(f(x) + 3) = \ln x + C$$

$$e^{\ln(f(x)+3)} = e^{\ln x + C}$$

$$f(x) + 3 = e^{\ln x} \cdot e^{C}$$

$$f(x) + 3 = K \cdot x$$

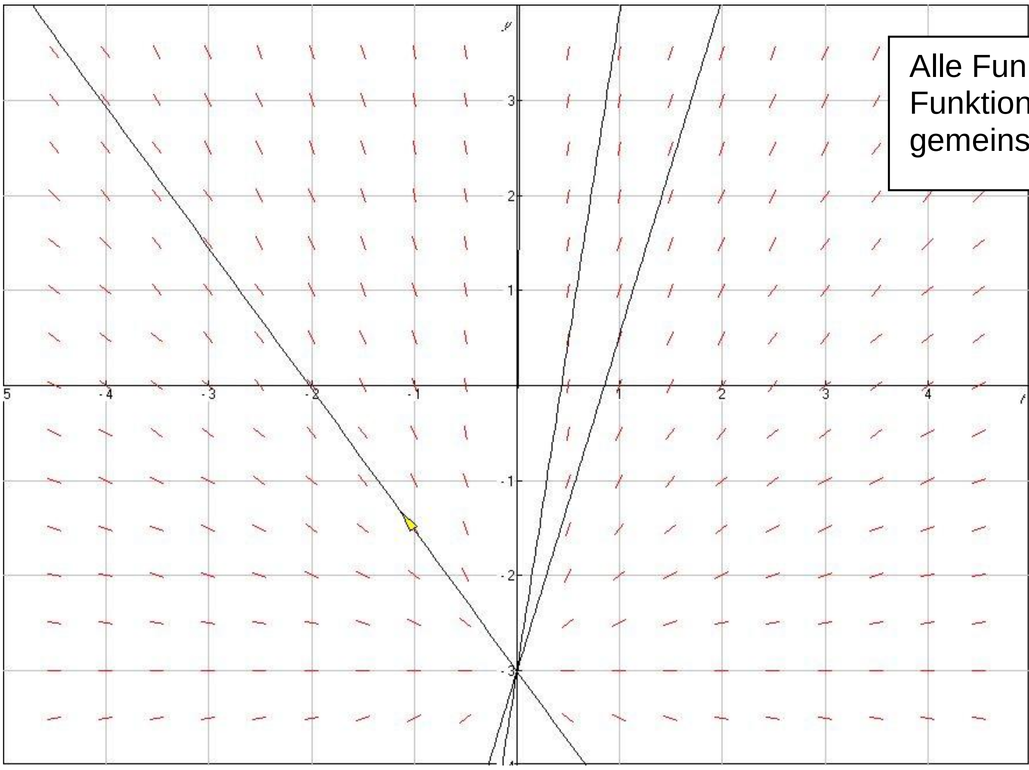
$$f(x) = K \cdot x - 3$$

#5

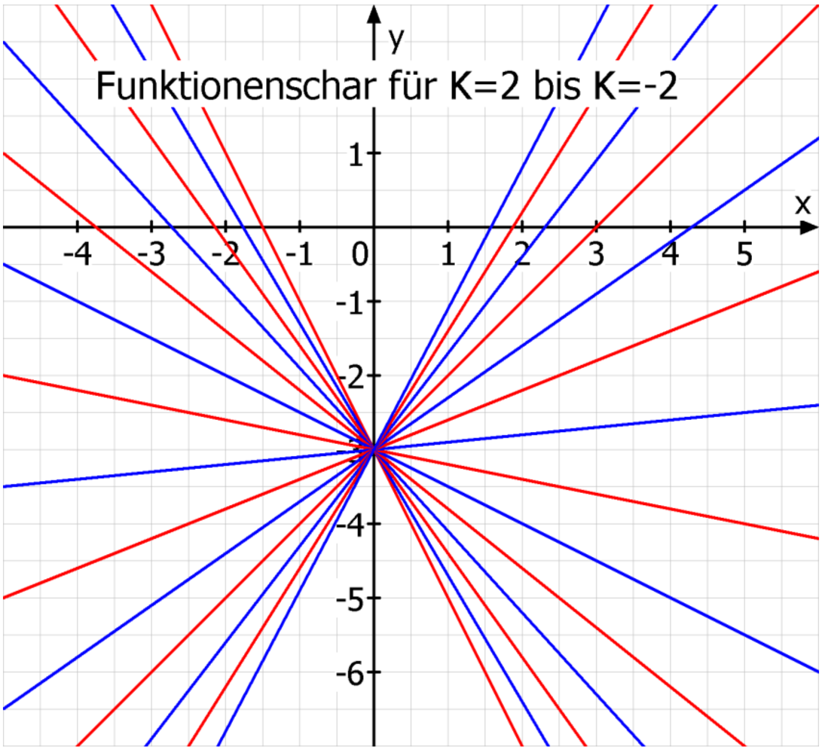
$$xf'(x) - 3 = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) + 3}{x}$$

Richtungsfelder für die Funktion:



Alle Funktionen der Funktionenschar haben den gemeinsamen Punkt P(0|-3).



#6

$$f(x)\cdot e^x + f'(x)\cdot e^x = -e^{-x}$$

$$\int (f(x)\cdot e^x + f'(x)\cdot e^x)\,dx = -\int e^{-x}\,dx$$

$$f(x)\cdot e^x = e^{-x}$$

$$f(x) = e^{-x}\cdot\frac{1}{e^x}$$

$$f(x) = e^{-x}\cdot e^{-x}$$

$$f(x) = e^{2x}$$

#7

$$t(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$f'(x_0)\,(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$(x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 = x_0 - 4$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 4$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{4}\,dx$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{4}x + C$$

$e^{\ln f(x)} = e^{\frac{1}{4}x+C}$

$f(x) = e^{0,25x} \cdot e^{C}$

$f(x) = K \cdot e^{0,25x}$

$f'(x) = 0,25K \cdot e^{0,25x}$

$t(x) = 0,25K \cdot e^{0,25x_0}(x - x_0) + K \cdot e^{0,25x_0}$

$t(x) = 0,25(x - x_0) + 1$

$x_0 = 1$:

$t(x) = 0,25\,(x - 1) + 1 = 0$

$0,25\,(x - 1) = -1$

$x - 1 = -4$

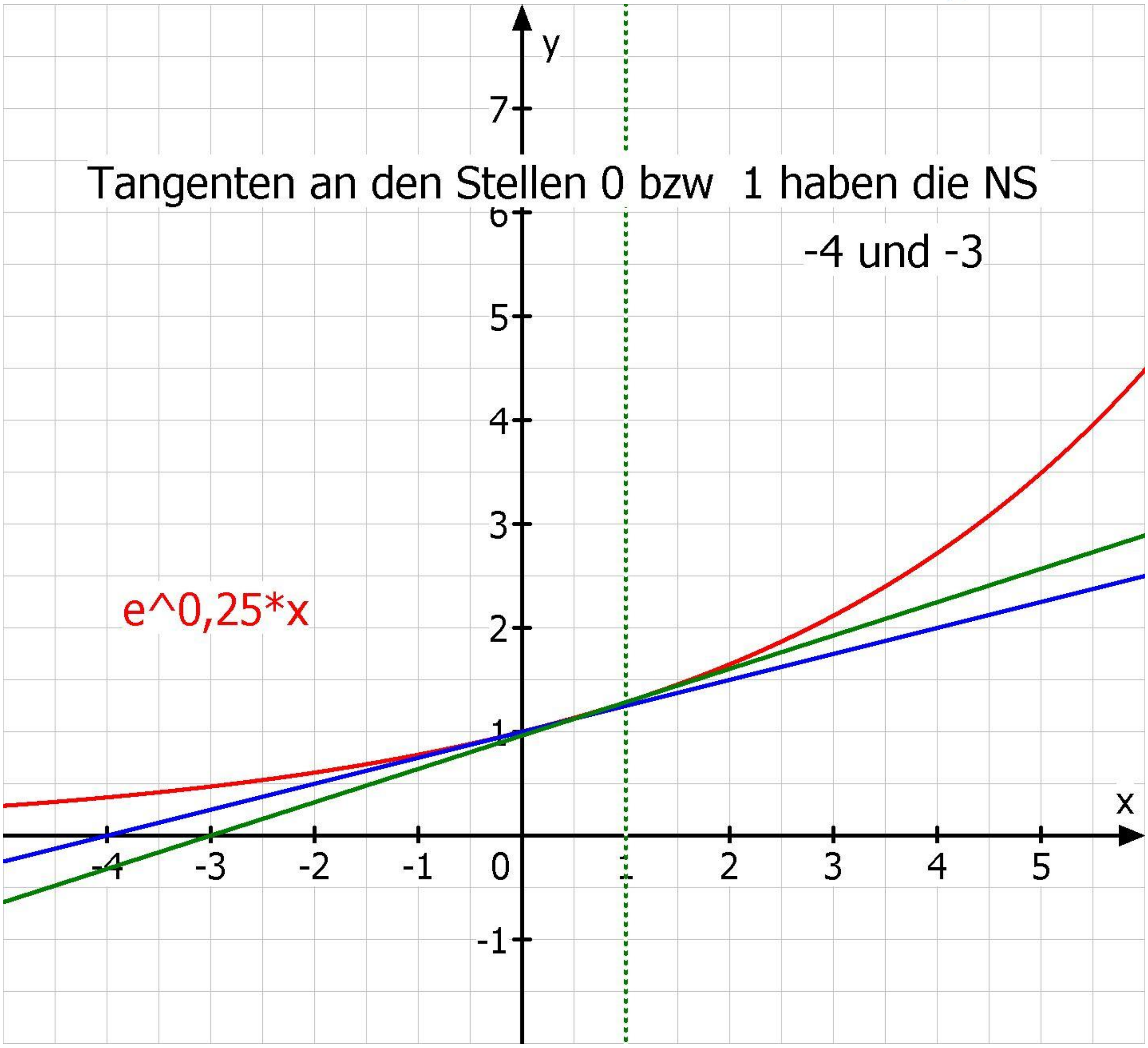
$x = -3$

$x_0 = 0$:

$t(x) = 0,25\,(x - 0) + 1 = 0$

$0,25\,x = -1$

$x = -4$



#8

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$n(0) = \frac{x_0}{f'(x_0)} + f(x_0) = f(x_0) + 4$$

$$\frac{x}{f'(x)} = 4$$

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x}{4}$$

$$\int f'(x)dx = \frac{1}{4}\int x \ dx$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}C$$

$$f(x) = K + \frac{1}{8}x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x$$

$$\rightarrow\ n(x) = -\frac{4}{x_0}(x - x_0) + K + \frac{1}{8}{x_0}^2$$