

Werkzeuge

Allgemeiner Prozess

durchlaufe die folgenden Phasen:¹

fang an >
benutze vorhandenes Wissen >
entwickle neue Ansätze >
entwurf einen Plan>
führe den Plan aus >

reflektiere>²

Fang an

führe Notationen ein
zeichne Diagramme

betrachte Spezialfälle
sammle und organisiere Daten
betrachte Extremfälle
vereinfache Dinge³

entwickle Repräsentationen >

zerlege das Problem:
Was ist unbekannt?
Was ist gegeben?
Was sind die Bedingungen?⁴

untersuche diese Teile
vereinfache diese Teile
verändere diese Teile

prüfe Definitionen

Benutze vorhandenes Wissen

benutze relevante Sätze
benutze gelöste Probleme
benutze deren Ergebnisse
benutze deren Methoden

finde geeignetes Material:
mittels der Unbekannten:
Wo tritt dieselbe Unbekannte auf?

sammle Informationen >

das Material anwendbar machen:
das Problem anpassen
das Material anpassen

Untersuche verwandte Probleme

betrachte speziellere Probleme
betrachte ähnliche / analoge Probleme
betrachte allgemeinere Probleme⁵

Entwurf einen Plan

entwurf eine Beweis-Hierarchie:⁶
Beweis-Strategien⁷
Beweis-Taktiken
Beweis-Details

Hilfsmittel zur Planung:
frage wiederholt:
“Wie lässt sich das machen?“⁸
von oben nach unten entwerfen
von unten nach oben entwerfen
wichtige Prinzipien benutzen >
Zwischenschritte entwerfen
(für die Beweis-Hierarchie)
einen vorletzten Schritt entwerfen⁹
Wunschdenken / Vereinfachen¹⁰

Vorwärtssuche
Rückwärtssuche

Führe den Plan aus

arbeite sorgfältig
Korrektheit bewiesen?
Korrektheit unmittelbar einsichtig?
sei kritisch und misstrauisch bei der Prüfung

Entwickle Repräsentationen

führe Notationen ein
zeichne Diagramme
entwickle eine Anschauung¹¹

benutze verschiedene Repräsentationen:

geometrisch
Koordinatensysteme
kartesisch, Polar-, Zylinder-...
wähle Koordinatenursprung

algebraisch
b-adische Darstellung
faktorisiere

algorithmisch
weitere Repräsentationen?

organisiere Daten:
in Tabellen
in Diagrammen
in Zeichnungen, hierarchischen Bäumen...

nutze Symmetrien und Invarianten aus

Beweisarten

direkter Beweis¹²
Beweis durch vollständige Induktion
Beweis durch Umkehrschluss
Beweis durch Widerspruch
konstruktiver Beweis
Beweis durch Fallunterscheidungen
probabilistischer Beweis
kombinatorischer Beweis
nichtkonstruktiver Beweis
anschaulicher Beweis
computergestützter Beweis

Finde neue Ansätze

allgemeine Idee:
wähle Objekte des Problemlösens
modifiziere diese Objekte
betrachte die Wirkungen

Was modifizieren?:
Objekte der eigentlichen Problemstellung

Problem-Elemente
Unbekannte
Gegebenes
Bedingungen

Repräsentationen >
Blickwinkel, Perspektive, Bezugsrahmen

Wie modifizieren?:
substituieren, ersetzen
mit anderen Elementen kombinieren
umstellen, anders anordnen
eliminieren
austauschen
anpassen, verändern
hinzufügen
minimieren, maximieren
in Teile zerlegen
annähern, abschätzen

Was betrachten?
Symmetrien
Muster
Extreme
Grenzwerte
Daten
Invarianten
Details - einblenden oder ausblenden
Parität
...

Wichtige Prinzipien

Analogien¹³
14
Fubini-Prinzip¹⁵
Parität¹⁶
Dirichlet-Prinzip¹⁷
Prinzip des Ein- und Ausschließens¹⁸
Widersprüche¹⁹
Induktion²⁰
Verallgemeinerungen²¹
Spezialfälle
Variationen²²
Invarianz²³
Monovarianz²⁴
Unendlicher Abstieg²⁵
Symmetrien²⁶
Extreme²⁷
Rekursionen²⁸
schrittweise Annäherungen
Einfärbungen²⁹
Randomisierungen³⁰
Perspektivenwechsel³¹
Modularisierungen³²
Brute Force³³

benutze einen Computer...
für Berechnungen
für Simulationen

benutze “gierige“ Verfahren³⁴
baue ein Modell³⁵
raten und ausprobieren

Nützliche mathematische Konzepte

komplexe Zahlen
Graphen
erzeugende Funktionen

...
ersetze konstante Parameter durch Veränderliche

Annäherungen und Abschätzungen
benutze Ungleichungen

...

Verändere heuristische Ansätze

allgemeine Idee:
wähle heuristische Objekte aus
verändere sie

heuristische Objekte:
Beweis-Hierarchie
Beweis-Strategie
Beweis-Taktik
Beweis-Details
Repräsentationen
Problem-Bestandteile
Unbekannte
Gegebenes
Bedingungen
Suchrichtung
vorwärts / rückwärts

Veränderungen:
prüfe Alternativen
prüfe das Gegenteil

Sammlle Informationen

rede mit Anderen
direkt, per E-Mail

benutze das Internet:

mathematische Enzyklopädien
Wolfram MathWorld³⁶
PlanetMath³⁷
Springer Encyclopedia³⁸
Wikipedia
...

Mathe-Foren etc.³⁹
AoPS⁴⁰
PlanetMath⁴¹
Matroids Matheplanet⁴²
mathoverflow⁴³
...

Literatursuche
MathSciNet⁴⁴
Zentralblatt MATH⁴⁵
...

benutze Bücher und Bibliotheken:
Skripte, Lehrbücher, Formelsammlungen...

Eigene Werkzeuge

Werkzeuge Reflexion

Reflektieren

benutze die Reflektionsspalte

während der Arbeit
sammle Fragen
Wo hakt es?
Wo treten Konflikte auf?
Was ist das Ziel?
Was ist der Plan?
Was lässt sich verbessern?

Und jetzt? Was tun?

nach getaner Arbeit:
Was hat funktioniert?
Was hat nicht funktioniert? Warum?
Resultate weiter auswerten
Methoden weiter auswerten

prüfe auf häufige Fehler>

Häufige Fehler

Denken ist häufig...
übereilt
beschränkt
unscharf
orientierungslos⁴⁶

ungeeignete Repräsentation benutzen

ohne Ziel arbeiten
ohne Plan arbeiten
Fehler bei Ausführung eines Plans
Mangel an Reflexion

prüfe Listen häufiger Fehler⁴⁷

Sonstiges

Bleib arbeitsfähig

red’ mit Leuten

iss / trink was...
beweg Dich, mach Sport
atme tief durch
mach Pause, schlaf
wechsle die Arbeitsumgebung

hör oder mach Musik
arbeite nichtmathematisch
arbeite mathematisch in einem anderen Bereich
setz Dich neuen Ideen aus

Bleib dran

arbeite nur noch 15 Minuten weiter
(und wiederhol dies)
motivier Dich in Selbstgesprächen
stell Dir vor, die Arbeit sei getan
erinnere Dich an frühere Erfolge

Notes

¹Ein paar Vorbemerkungen zu dieser Werkzeugsammlung:

Die Sammlung ist ein erster Entwurf und nicht besonders ausgefeilt.

Die kurzen Erläuterungen in diesen Fußnoten sind zum Verständnis einzelner Werkzeuge sicher nicht immer ausreichend.

Die Ratschläge entsprechen keinem einheitlichen Niveau - manche sind elementar, andere deutlich fortgeschrittener. Diese Sammlung muss mit Sicherheit an die eigenen Bedürfnisse angepasst werden.

Die Sammlung enthält bislang fast ausschließlich gebietsübergreifende Werkzeuge, aber nichts Spezielles für einzelne Bereiche der Mathematik, wie Algebra oder Analysis.

Doppelte Einträge sollen helfen, nützliche Tipps in verschiedenen Zusammenhängen rasch aufzufinden.

Das Symbol „>“ verweist auf andere Abschnitte in der Werkzeugsammlung.

Für die Inhalte der verlinkten Internetseiten übernehme ich keine Verantwortung.

²Dieser allgemeine Prozess und viele weitere Ideen in dieser Werkzeugsammlung sind natürlich sehr stark von George Polyas Buch „Schule des Denkens“ beeinflusst.

³Zum Beispiel hässliche Dinge durch hübsche ersetzen. Vgl. das Werkzeug „Wunschdenken“ weiter unten.

⁴Die Kategorien unbekannt, gegeben, Bedingung stammen wiederum aus Polyas „Schule des Denkens“.

⁵Allgemeinere Probleme zu betrachten ist *manchmal* nützlich. Bei einer Induktion hat man zum Beispiel mehr zu beweisen, aber auch stärkere Voraussetzungen.

⁶Konstruiere eine Hierarchie von Beweisschritten.

Beispiel Induktion: Auf der Spitze der Hierarchie steht das Induktionsprinzip, darunter die Schritte Induktionsbeginn und der Induktionsschritt. darunter folgen Detail für den Beweis des Induktionsanfangs und des Induktionsschritts. In den meisten Fällen ist eine solche einfache Konstruktion natürlich nicht möglich, stattdessen muss der Beweis aus verschiedenen Bausteinen zusammengesetzt werden, was oft eine Kombination von Strategien der Art “von oben nach unten“ und “von unten nach oben“ erfordert.

Zum besseren Verständnis des Konzepts einer Beweishierarchie mag die Lektüre eines Artikels von Leslie Lamport lohnen:

<http://research.microsoft.com/en-us/um/people/lamport/pubs/lamport-how-to-write.pdf>.

⁷Die drei Schichten Strategie - Taktik - Details sind natürlich nicht scharf abgrenzbar, aber vielleicht dennoch nützlich. Siehe dazu auch das Buch von Paul Zeitz, “The Art and Craft of Problem Solving“, New York 1999, Abschnitt 1.2.

⁸Dieses und das nächste Werkzeuge sind natürlich eng mit der Rückwärtssuche verwandt.

⁹Welcher Schritt könnte schließlich zum gewünschten Resultat führen? (Aus: Zeitz, Abschnitt 2.2).

¹⁰Versuchen, die schwierigen Dinge zum Verschwinden zu bringen “[...] wenn das Problem große, häßliche Zahlen enthält, ersetze sie durch kleine hübsche“ - Zeitz, Kapitel 2.2.

¹¹Zur Veranschaulichung mathematischer Konzepte gibt es zahlreiche Webseiten, zum Beispiel

<http://www.cinderella.de/files/HTMLDemos/>,

<http://www.artofproblemsolving.com/Resources/videos.php?type=other> or

<http://demonstrations.wolfram.com/>.

¹²Diese Liste stammt aus

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_proof; Details zu den Beweisarten finden sich dort.

¹³Diese Liste stammt aus Christian Hesses Buch „Das kleine Einmaleins des klaren Denkens“, München 2009

¹⁴Führe das Problem auf ein bereits gelöstes zurück.

¹⁵Etwas zählen, indem man etwas anderes zählt. Der Gauss’sche Trick zur Bestimmung von $1 + 2 + \dots + 100$ ist ein berühmtes Beispiel.

¹⁶Betrachte gerade und ungerade Zahlen, oder abstrakter: Definiere zwei disjunkte Mengen und leite Schlussfolgerungen daraus ab.

¹⁷Wenn $n + 1$ Gegenstände auf n Kästen verteilt werden, so befinden sich in mindestens einem Kasten zwei oder mehr Gegenstände.

¹⁸ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ und Verallgemeinerungen hierzu.

¹⁹Nimm das Gegenteil dessen an was zu zeigen ist und leite einen Widerspruch ab.

²⁰Denke neben der klassischen vollständigen Induktion auch an Dinge wie Abwärts- oder Rückwärtsinduktion.

²¹Versuche ein allgemeineres Problem zu lösen.

²²Gewinne Einsichten in ein Problem durch Variation verschiedener Aspekte.

²³Konstruiere etwas, dass bei gewissen Transformationen unverändert bleibt.

²⁴Konstruiere etwas, dass bei gewissen Transformationen nur anwachsen kann.

²⁵Ein Werkzeug für Widerspruchsbeweise: Folgere aus der Existenz einer Lösung, dass eine kleiner und dann eine noch kleinere existiert, dass aber ein derartiger unendlicher Abstieg für das gegebene Problem nicht möglich ist.

- ²⁶Suche und benutze Symmetrien in einem gegebenen System.
- ²⁷Betrachte extreme Elemente.
- ²⁸Lässt sich das Problem auf eine einfachere Version seiner selbst zurückführen?
- ²⁹Färbe Elemente des Problems ein und leite Informationen daraus ab. Beispiel: Ein Schachbrett mit zwei fehlenden einander gegenüberliegenden Ecken lässt sich nicht durch Dominosteine überdecken.
- ³⁰Führe Zufallselemente in die Problemstellung ein, um sie zu vereinfachen.
- ³¹Zum Beispiel: Rückwärtssuche.
- ³²Zerlege das Problem in kleinere Teile, löse diese und füge daraus eine Lösung des Ausgangsproblems zusammen.
- ³³Prüfe *alle* möglichen Lösungen.
- ³⁴Wenn etwas per Algorithmus konstruiert werden soll, dann nimm in jedem Einzelschritt soviel wie möglich, oder abstrakter: Konstruiere eine global optimale Lösung aus lokal optimalen Teillösungen. Vgl. Arthur Engels Buch "Problem Solving Strategies", New York 1998.
- ³⁵Beispiel: Modelle für räumliche Körper.
- ³⁶<http://mathworld.wolfram.com/>.
- ³⁷<http://planetmath.org/encyclopedia>.
- ³⁸<http://eom.springer.de/>.
- ³⁹Zwecke und Ziele der Seiten unterscheiden sich teilweise beträchtlich. Bitte Einführungen und FAQs sorgfältig lesen.
- ⁴⁰<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php>.
- ⁴¹<http://planetmath.org/?op=forums>.
- ⁴²<http://www.matheplanet.com/>.
- ⁴³<http://mathoverflow.net/> - für Themen auf Forschungsniveau.
- ⁴⁴<http://www.ams.org/mathscinet/>.
- ⁴⁵<http://www.zentralblatt-math.org/zblmath/advanced/>.
- ⁴⁶Diese Diagnose stammt aus David Perkins' Buch "Outsmarting IQ", New York 1995, Kapitel 7.
- ⁴⁷Hier ist eine Liste häufiger Fehler für Studienanfänger:
<http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/commerrs/>.