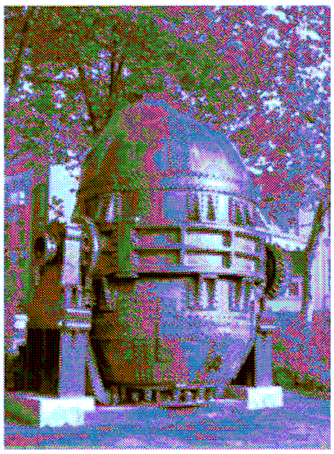
Thomas-Birne (Bröker)



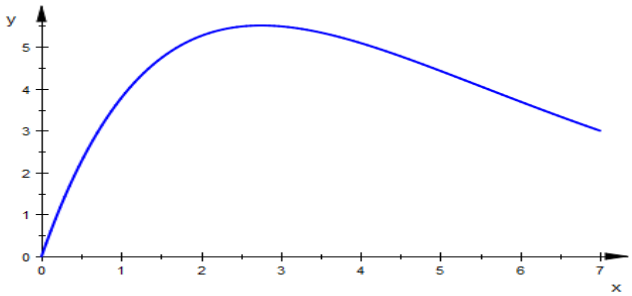
Das Thomas-Verfahren ist ein so genanntes Blas- oder Windfrischverfahren, bei dem durch Bodendüsen eines Konverters („Thomas-Birne“) Luft in flüssiges Roheisen geblasen wird. Das Foto zeigt eine Thomas-Birne, das Diagramm den Längsschnitt durch eine liegende Thomas-Birne. (Im Modell gilt: 1 Längeneinheit = 1 m). Die obere Begrenzung der Fläche kann im 1. Quadranten durch die Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = 2 \cdot x \cdot e^{1-ax} \qquad mit \qquad 0 \le x \le 7$$

beschrieben werden.

2.1 Berechnen Sie, für welchen Wert von a der Durchmesser der oberen Öffnung der Birne 6 m beträgt und ermitteln Sie den maximalen Durchmesser der Birne in Abhängigkeit von a.

Kontrollergebnisse:
a = 0,363; Extrema: H(1/a| 2/a)



2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f_a(x)$ auf Wendepunkte und geben Sie deren Koordinaten an.

Kontrollergebnis: *Wendepunkte W(2/a| 1,47/a)*

Im Folgenden wird eine spezielle Birne mit dem Wert $a = \frac{1}{4}$ betrachtet.

2.3 Skizzieren Sie den Graphen von $f_{1/4}(x)$ für $0 \le x \le 7$ in ein geeignetes Koordinatensystem!

2.4 Berechnen Sie die Fläche, die entsteht, wenn der Körper längs der x-y-Ebene aufgeschnitten wird! *Kontrollergebnis*: *Fläche 45,52m²*

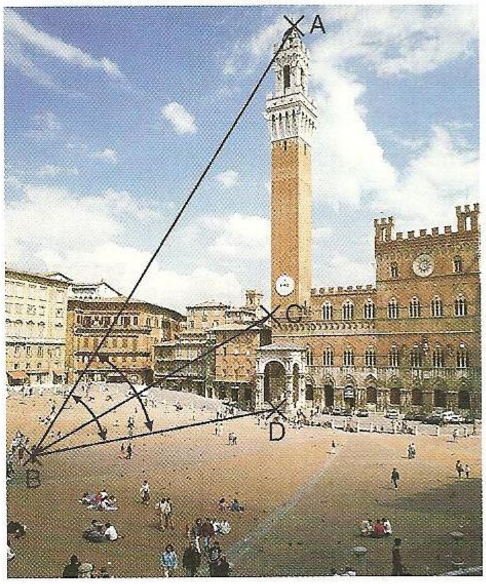
Zur Vereinfachung wird im Folgenden die Näherungsformel

$$V_E(h) = -4{,}4h^3 + 57h^2 + 36h \qquad mit \qquad 0 \le h \le 7$$

für die Berechnung des Volumens in Abhängigkeit der Füllhöhe h verwendet.

2.5 Vergleichen Sie diesen Näherungswert für das Birnenvolumen mit dem mittels Integrationsformel für Rotationskörper berechneten Wert und geben Sie die prozentuale Abweichung an! *Kontrollergebnis*: *Abweichung ca. 2,3%*

Turm von Siena



15.
In Siena steht am Rande des Piazza del Campo der Palazzo Publico (d. h. das Rathaus), der von einem Turm, dem Torre del Mangia, überragt wird.
Ein Tourist befindet sich 250 m vom Turm entfernt und geht dann mit einer Geschwindigkeit von $1{,}25\,\frac{m}{s}$ auf Turm und Palast zu. Er betrachtet während des Ganges nur den Teil des Turmes, der über den Palast hinausragt (Sehwinkel: $\sphericalangle ABC$).
Der Turm ist bei A 125 m, der Palast ist bei C 30 m hoch.

a) (1) Wie lang dauert der Gang?
(2) Begründe, dass es genau eine Entfernung vom Turm gibt, bei welcher der Sehwinkel optimal ist. Wie groß ist diese Entfernung und wann wird sie von dem Touristen erreicht?

b) Was ändert sich an der Lösung von Teilaufgabe a), wenn der Tourist nicht nur den überragenden Teil des Turms, sondern den ganzen Turm in den Blick nimmt? (Sehwinkel $\sphericalangle ABD$)

Vereinfachende Annahmen:
a) Die Größe der Touristen wird vernachlässigt.
b) Der Tourist bewegt sich horizontal auf gleiche Höhe mit dem Fuß des Turmes.

Kontrollergebnis zu a): Maximaler Sehwinkel: 37,8°; ca. 61m vom Turm entfernt.

Helikopter

Ein Helikopter startet 250 m von einem Beobachter entfernt und steigt dann mit einer Geschwindigkeit von 5 ms senkrecht nach oben.
Wie groß ist die Änderungsrate des Sehwinkels des Beobachters, wenn der Helikopter eine Höhe von 200 m über dem Boden erreicht hat?

Hinweis: Mit dem Beobachtungswinkel ist der Winkel zwischen dem Boden und dem Helikopter gemeint.

Kontrollergebnis: 0,703°/s (angenomme Beobachtergröße: 1,70m)

Lösung: **Thomas-Birne**

2.1

$$fa(7) = 3 = 14 \cdot e^{1-7a}$$

$$\frac{3}{14} = e^{1-7a}$$

$$\ln(\frac{3}{14}) = 1-7a$$

$$a = \frac{1-\ln\frac{3}{14}}{7} \approx 0{,}363$$

$$f_a(x) = 2xe^{1-ax}$$
$$f_a{}' = 2e^{1-ax} - 2axe^{1-ax} = (2-2ax)e^{1-ax}$$
$$f_a{}'' = -2ae^{1-ax}(2-ax)$$

Extrema:

$$f_a{}'(x) \overset{!}{=} 0$$
$$1-ax = 0 \qquad (da\ 2e^{1-ax} > 0\ \forall x)$$
$$x = \frac{1}{a}$$
$$f_a{}''(\frac{1}{a}) = -2a < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}\, ist\ relatives\ Maximum$$
$$f(\frac{1}{a}) = \frac{2}{a}e^{1-1} = \frac{2}{a} \qquad H(\frac{1}{a} \mid \frac{2}{a})$$

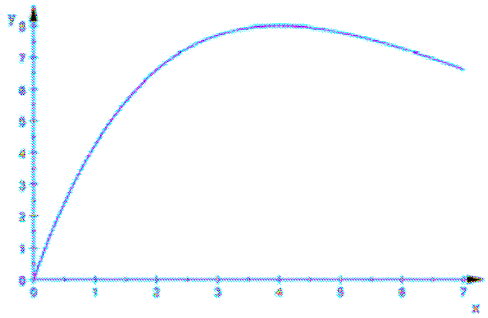
2.2

$$f_a{}''(x) \overset{!}{=} 0$$
$$2-ax = 0 \qquad (da\ -2ae^{1-ax} > 0\ \forall x)$$
$$x = \frac{2}{a}$$

Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung bei x, also ist x eine Extremstelle der 1. Ableitung.

$$f_a(\frac{2}{a}) = \frac{4}{a}e^{-1} = \frac{1{,}47}{a} \qquad W(\frac{2}{a} \mid \frac{1{,}47}{a})$$

2.3



2.4

$$\int_0^7 2xe^{1-\frac{1}{4}x}dx$$

Stammfunktion $F_a(x)$

$$f_a(x) = 2xe^{1-ax}$$

$$u = x \quad ; v' = e^{1-ax}$$

$$u' = 1 \quad ; v = -\frac{1}{a}e^{1-ax}$$

$$2\int xe^{1-ax}dx$$

$$= 2[-\frac{1}{a}xe^{1-ax} + \int \frac{1}{a}e^{1-ax}dx]$$

$$= 2[-\frac{1}{a}xe^{1-ax} - \frac{1}{a^2}e^{1-ax}]$$

$$= (-\frac{2x}{a} - \frac{2}{a^2})e^{1-ax} = F_a(x)$$

$$\int_0^7 2xe^{1-\frac{1}{4}x}dx$$

$$= (-8x - 32)e^{1-\frac{1}{4}x}\Big|_0^7$$

$$\approx 45{,}42$$

2.5

$V_E(h) = -4{,}4h^3 + 57h^2 - 36h$

$V_E(7) = -4{,}4 \cdot 7^3 + 57 \cdot 7^2 - 36 \cdot 7 = 1031{,}8$

$f_{\frac{1}{4}}(x) = 2xe^{1-\frac{1}{4}x}$

$(f_{\frac{1}{4}}(x))^2 = 4x^2e^{2-\frac{1}{2}x}$

$4\pi\int_0^7 \left(x^2e^{2-0{,}5x}\right)dx$

$u = 4x \quad ; v' = e^{2-0{,}5x}$

$u' = 4 \quad ; v = -2e^{2-0{,}5x}$

$= 4\pi\left(-2x^2e^{2-0{,}5x}\Big|_0^7 + \int_0^7 4xe^{2-0{,}5x}dx\right)$

$= 4\pi\left(-2x^2e^{2-0{,}5x}\Big|_0^7 - 8xe^{2-0{,}5x}\Big|_0^7 + \int_0^7 8e^{2-0{,}5x}dx\right)$

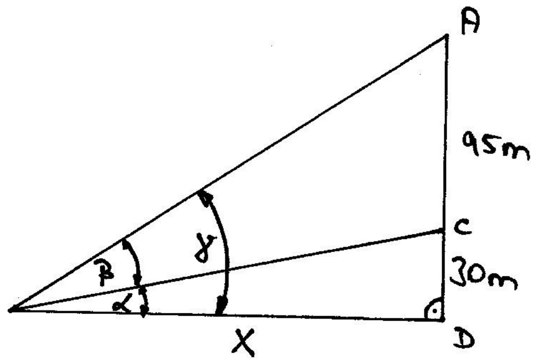
$= 4\pi\left((-2x^2 - 8x - 16)e^{2-0{,}5x}\Big|_0^7\right)$

$\approx 1008{,}99$

$p = \frac{1008{,}99 - 1031{,}8}{1008{,}99} = -0{,}023$

$\text{Abweichung}: p = 2{,}3\%$

Turm von Siena



a) (1) $s = 250\,m \;;\; v = 1{,}25\,\frac{m}{s}$

$$\underline{t} = \frac{s}{v} = \frac{250\,m}{1{,}25\,\frac{m}{s}} = \underline{200\,s}$$

(2) ges.: β_{max}

$$\beta(x) = \gamma(x) - \alpha(x)$$

$$= \arctan\frac{125}{x} - \arctan\frac{30}{x}$$

$$\beta'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{125}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{125}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{30}{x}\right)^2}\left(-\frac{30}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{30}{1+\frac{900}{x^2}} - \frac{125}{1+\frac{15625}{x^2}}\right)$$

$$\beta'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{30}{1+\frac{900}{x^2}} = \frac{125}{1+\frac{15625}{x^2}}$$

zu a) $1+\frac{15625}{x^2} = \frac{25}{6}\left(1+\frac{900}{x^2}\right)$

$$\frac{1}{x^2}\left(15625-\frac{25}{6}\cdot 900\right) = \frac{25}{6}-1$$

$$\frac{1}{x^2}\cdot 11875 = \frac{19}{6}$$

$$x^2 = 3750$$

$$x = \pm 61{,}24$$

Die negative Lösung entfällt, da die Entfernung x vom Turm positiv ist.

$$\underline{x = 61{,}24\,m}$$

$$\underline{t} = \frac{250\,m - 61{,}24\,m}{1{,}25\,\frac{m}{s}} = \underline{151{,}01\,s}$$

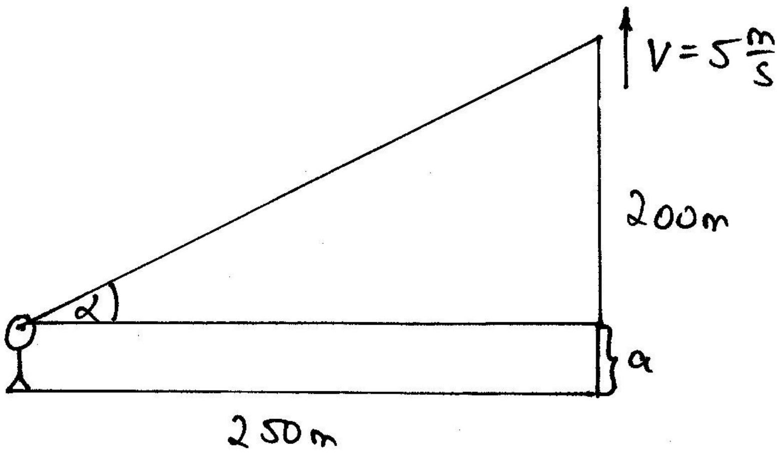
$$\underline{\beta_{max}} = \arctan\frac{125}{61{,}24} - \arctan\frac{30}{61{,}24}$$

$$= 0{,}6597 \mathrel{\hat{=}} \underline{37{,}8°}$$

b) $\beta = \arctan\frac{125}{x}$ (denn: $\alpha = 0$)

für $\lim\limits_{x\to 0}$ gilt $\beta \to 90°$, d.h. die Entfernung zum Turm muss minimal sein, damit der Turm maximal groß erscheint!

Helikopter



$$\alpha(t) = \arctan \frac{5\frac{m}{s} \cdot t - a}{250m}$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\,\alpha(t)}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{5\frac{m}{s} t - a}{250m}\right)^2} \cdot \frac{1}{50s}$$

200m Höhe und $v = 5\frac{m}{s} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = 40s$

$$\dot{\alpha}(40s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{5\frac{m}{s} \cdot 40s - a}{250m}\right)^2} \cdot \frac{1}{50s}$$

Für einen Beobachter mit $a = 1{,}70m$ folgt:

$$\underline{\dot{\alpha}(40s)} = 0.0123 \frac{rad}{s}$$

$$\hat{=} \underline{0{,}703\ °/s}$$