

Protokoll vom 17.01.2014 Lösungen der Hausaufgaben:

S.32 Nr.2 h

$$f(x) = \frac{1}{t+x}$$

S.32 Nr.3 f

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

S.32 Nr. 5

a)  $x = e^x$

b)  $x = 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} > 0$

d)  $f''(x) < 0$  für alle  $x \Rightarrow f(x)$  ist rechts gekrümmt

S.32 Nr. 6

a) umkehrbar

b) nicht umkehrbar

c) nicht umkehrbar

d) umkehrbar

S.32 Nr. 7 a

$$f'(x) = 3x^2 + 1 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist umkehrbar}$$

S.32 Nr. 13 h

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \left( \frac{\ln(x)}{2} + 1 \right)$$

---

Wir beginnen mit Beispielen, bei welchen wir mit schlichter Strategie die Stammfunktion berechnen möchten.

$$\int x \times \sin(x)$$

---

$$g'(x) = \sin(x) \quad g(x) = -\cos(x)$$

$$h(x) = x \quad h'(x) = 1$$

---

$$\int x \times \sin(x) dx = -x \times \cos(x) + \int \cos(x) dx \dots$$

Der Sinn wurde nicht erfüllt, also versuchen wir es anders:

---

$$g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$h(x) = \sin(x) \quad h'(x) = \cos(x)$$

---

$$\int f(x) dx = \frac{x^2 \times \sin(x)}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \times \cos(x)\right)$$

---> Diese Methode ist ebenfalls ungeschickt.

---

Ein anderes Beispiel:

$$\int x \times \ln(x)$$


---

$$g'(x) = \ln(x) \quad g(x) = x \times \ln(x) - x$$

$$h(x) = x \quad h'(x) = 1$$


---

Und wieder bemerkt man, dass es nicht einfacher wird. Also setzen wir auch hier anders an.

---

$$g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$h(x) = \ln(x) \quad h'(x) = \frac{1}{x}$$


---

$$\int f(x) dx = \ln(x) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$\ln(x) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$\ln(x) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \times \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{2} \times \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$


---

Ein anderes Beispiel:

$$\int x \times e^{x^2}$$


---

$$g'(x) = e^{x^2} \quad g(x) = ?$$

$$h(x) = x \quad h'(x) = 1$$


---

Hier gibt es wieder ein Problem!

Also müssen wir wieder anders ansetzen:

---

$$g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$h(x) = e^{x^2} \quad h'(x) = 2x \times e^{x^2}$$


---

$$\int x \times e^{x^2} = e^{x^2} \times \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) \times 2x \times e^{x^2} dx$$

$$e^{x^2} \times \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int x^3 \times e^{x^2} dx$$

---> Partielles Integrieren ist hier nicht möglich!

---

Um diesen Problemen entgegen zu wirken gibt es die „Integration durch Substitution“:

$$f(x) = h(g(x))$$

$$f'(x) = h'(g(x)) \times g'(x)$$

$$\int f'(x) dx = \int h'(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$f(x) = h(g(x)) = \int h'(g(x)) \times g'(x) dx$$

! h ist die Stammfunktion von h' !

$h'(x) = k(x)$  Stammfunktion  $K(x)$

---

$$\int k(g(x)) \times g'(x) dx = K(g(x))$$

$$\int h(g(x)) \times g'(x) dx = H(g(x))$$

---

Beispiel Nr.1:

$$\int e^{\sin(x)} \times \cos(x) dx$$

---

$$g(x) = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x)$$

$$h(t) = e^t \quad H(t) = e^t$$

---

$$\int e^{\sin(x)} \times \cos(x) = \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$\int H(g(x))$$

$$e^{\sin(x)} + C$$

Probe:

$$F'(x) = e^{\sin(x)} \times \cos(x) = f(x)$$

---

Beispiel Nr.2:

$$\int x \times e^{x^2}$$

---

$$g(x) = x^2 \quad g'(x) = 2x$$

$$h(t) = e^t \quad H(t) = e^t$$

---

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

Hier ist es wichtig den Term anzupassen.

$$\frac{1}{2} H(g(x))$$

$$\frac{1}{2} e^{x^2} + C = F(x)$$

Problem:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times e^{x^2} \times 2x = x \times e^{x^2} = f(x)$$

---

Beispiel Nr. 3:

$$\int (0,5x+1)^4 dx$$

---

$$g(x) = 0,5x + 1 \quad g'(x) = 0,5$$

$$h(t) = t^4 \quad H(t) = \frac{t^5}{5}$$

---

$$\int f(x) dx = 2 \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$2H(g(x)) = 2 \frac{(0,5x+1)^5}{5} + C = F(x)$$

Problem:

$$F'(x) = \frac{2}{5} \times 5 \times (0,5x+1)^4 \times 0,5 = f(x)$$

Beispiel Nr. 4:

$$\int 3 \cos(x) \times \sin(x)^3 = 3 \int \cos(x) \times \sin(x)$$

---

$$g(x) = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x)$$

$$h(t) = t^3 \quad H(x) = \left(\frac{t}{4}\right)^4$$

---

$$\int f(x) dx = 3 \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$3H(g(x))$$

$$3 \times \left(\frac{\sin(x)^4}{4}\right) + C = F(x)$$

Probe:

$$F'(x) = \frac{3}{4} \times 4 (\sin(x))^3 \times \cos(x) = 3 (\sin(x))^3 \times \cos(x) = f(x)$$

---

Beispiel Nr. 5:

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

---

$$g(x) = x^2 - 1 \quad g'(x) = 2x$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad H(x) = 2\sqrt{t}$$

---

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$\frac{1}{2} \times H(g(x))$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} = F(x)$$

---

Beispiel Nr. 6:

$$\int \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}}$$

---

$$g(x) = x^2 + x \quad g'(x) = 2x + 1$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad H(x) = 2\sqrt{t}$$

---

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \times \int h(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$\frac{1}{2} \times H(g(x))$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + x} + c$$

$$\sqrt{x^2 + x} + C = F(x)$$

Probe:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \times (2x + 1) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}} = f(x)$$

---

Beispiel Nr. 7:

$$\int \left( \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right)$$

---

$$g(x) = \sqrt{x} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h(x) = e^x \quad H(x) = e^x$$

---

$$\int f(x) dx = 2 \int h(g(x)) \times g'(x)$$

$$2H(g(x))$$

$$2 \times e^{\sqrt{x}} + C = F(x)$$

---