Protokoll vom 17.01.2014Lösungen der Hausaufgaben:

S.32 Nr.2 h

f'(x)= $\frac{1}{t+x}$

S.32 Nr.3 f

f'(x)= $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ = $\frac{1}{\tan(x)}$

S.32 Nr. 5

a) x= e^x

b) x=1

c) f'(x)= $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}>0$

d) $f''(x)<0$ für alle x => f(x) ist rechts gekrümmt

S.32 Nr. 6

a) umkehrbar

b) nicht umkehrbar

c) nicht umkehrbar

d) umkehrbar

S.32 Nr. 7 a

$f'(x)=3x^2+1>0=¿\mathit{streng\ monoton\ wachsend}$

S.32 Nr. 13 h

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{\ln(x)}{2}+1)$

Wir beginnen mit Beispielen, bei welchen wir mit schlichter Strategie die Stammfunktion berechnen möchten.

$\int x\sin(x)dx$

---

g'(x)= sin(x) g(x)= -cos(x)

h(x)= x h'(x)= 1

$\int x\sin(x)dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)dx=-xcos(x)+\sin(x)+C=F(x)$ …

Der Sinn wurde nicht erfüllt, also versuchen wir es anders:

---

g'(x)=x g(x)= $\frac{x^2}{2}$

h(x)= $\sin(x)$ h'(x)= $\cos(x)$

So wird es noch unüberschaubarer.

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2 \sin(x)}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2}\cos(x)\right)$$

---> Diese Methode ist ungeschickt.

Ein anderes Beispiel:

$$\int \ln(x)\,dx$$

g'(x)= $\ln(x)$ g(x)= $x \times \ln(x) - x$

h(x)= x h'(x)= 1

Und wieder bemerkt man, dass es nicht einfacher wird. Also setzten wir auch hier anders an.

g'(x)=x g'(x)= $\frac{x^2}{2}$

h(x)= $\ln(x)$ h'(x)= $\frac{1}{x}$

$$\int f(x)\,dx = \ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$\ln(x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) = F(x)$$

Ein anderes Beispiel:

$$\int x\,e^{x^2}\,dx$$

g'(x) = e^{x^2} g(x)= ? !Die Stammfunktion haben wir nicht ermitteln können!

h(x)=x h'(x)= 1

Hier gibt es wieder ein Problem!

Also müssen wir wieder anders ansetzen:

g'(x)= x g(x)= $\frac{x^2}{2}$

h(x)= e^{x^2} h'(x)= $2x\,e^{x^2}$

$$\int x\,e^{x^2} = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) 2x\,e^{x^2}\,dx$$

$$e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int x^3\,e^{x^2}\,dx$$

---> Partielles Integrieren ist hier nicht möglich!

Um diesen Problemen entgegen zu wirken gibt es die „Integration durch Substitution“:

$$f(x)=h(g(x))$$
$$f'(x)=h'(g(x))\,g'(x)$$
$$\int f'(x)\,dx=\int h'(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$\boxed{f(x)=h(g(x))=\int h'(g(x))\,g'(x)\,dx=f(x)}$$

! h ist die Stammfunktion von h' !

h'(x) = k(x)   Stammfunktion K(x)

$$\int k(g(x))\,g'(x)\,dx=K(g(x))$$

$$\boxed{\int h(g(x))\,g'(x)\,dx=H(g(x))}$$

Beispiel Nr.1:

$$\int \mathrm{e}^{\sin(x)}\times\cos(x)\,dx$$

g(x)= sin(x)   g'(x)= cos(x)

h(t)= e^{t} H(t)= e^{t}

$$\int \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)=\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$
$$\int H(g(x))$$
$$\mathrm{e}^{\sin(x)}+C=F(x)$$

Probe:

$$F'(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)=f(x)$$

Beispiel Nr.2:

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$$

$g(x)=x^2$ g'(x)= 2x

h(t)= e^{t} H(t)= e^{t}

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int h(g(x))\times g'(x)\,dx$$

Hier ist es wichtig, den Term anzupassen.

$$\frac{1}{2}H(g(x))$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C=F(x)$$

Probe:

$$F'(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\,2\mathrm{x}=x\,\mathrm{e}^{x}=f(x)$$

Beispiel Nr. 3:

$$\int (0{,}5+1)^4 \, dx$$

g(x)= 0,5x +1 g'(x)= 0,5

h(t)= t^4 H(t)= $\frac{t^5}{5}$

$$\int f(x)\,dx = 2\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$2\,H(g(x)) = 2\frac{(0{,}5\,x+1)}{5} + C = F(x)$$

Problem:

$$F'(x) = \frac{2}{5}5(0{,}5\,x+1)^4\,0{,}5 = f(x)$$

Beispiel Nr. 4:

$$\int 3\cos(x)\sin(x)^3\,dx = 3\int \cos(x)\sin(x)\,dx$$

g(x)= sin(x) g'(x)= cos(x)

h(t)= t^3 H(x)= $(\frac{t}{4})^4$

$$\int f(x)\,dx = 3\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$3\,H(g(x))$$

$$3(\frac{\sin(x)^4}{4}) + C = F(x)$$

Probe:

$$F'(x) = \frac{3}{4}4(\sin(x))^3\cos(x) = 3(\sin(x))^3\cos(x) = f(x)$$

Beispiel Nr. 5:

$$\int (\frac{x}{\sqrt{x^2-1}})$$

g(x)= x^2-1 g'(x)= 2x

h(t)= $\frac{1}{\sqrt{t}}$ H(x)= $2\sqrt{t}$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}H(g(x))$$

$$\frac{1}{2}2\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} = F(x)$$

Beispiel Nr. 6:

$$\int \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}\right) dx$$

g(x)= x^2+x g'(x)= 2x+1

h(t)= $\frac{1}{\sqrt{t}}$ H(x)= $2\sqrt{t}$

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}H(g(x))$$

$$\frac{1}{2}2\sqrt{x^2+x}+c$$

$$\sqrt{x^2+x}+C=F(x)$$

Probe:

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2\mathrm{x}+1)=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}=f(x)$$

Beispiel Nr. 7:

$$\int \left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) dx$$

g(x)= $\sqrt{x}$ g'(x)= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

h(x)= e^t H(x)= e^t

$$\int f(x)\,dx=2\int h(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$2H(g(x))$$

$$2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C=F(x)$$