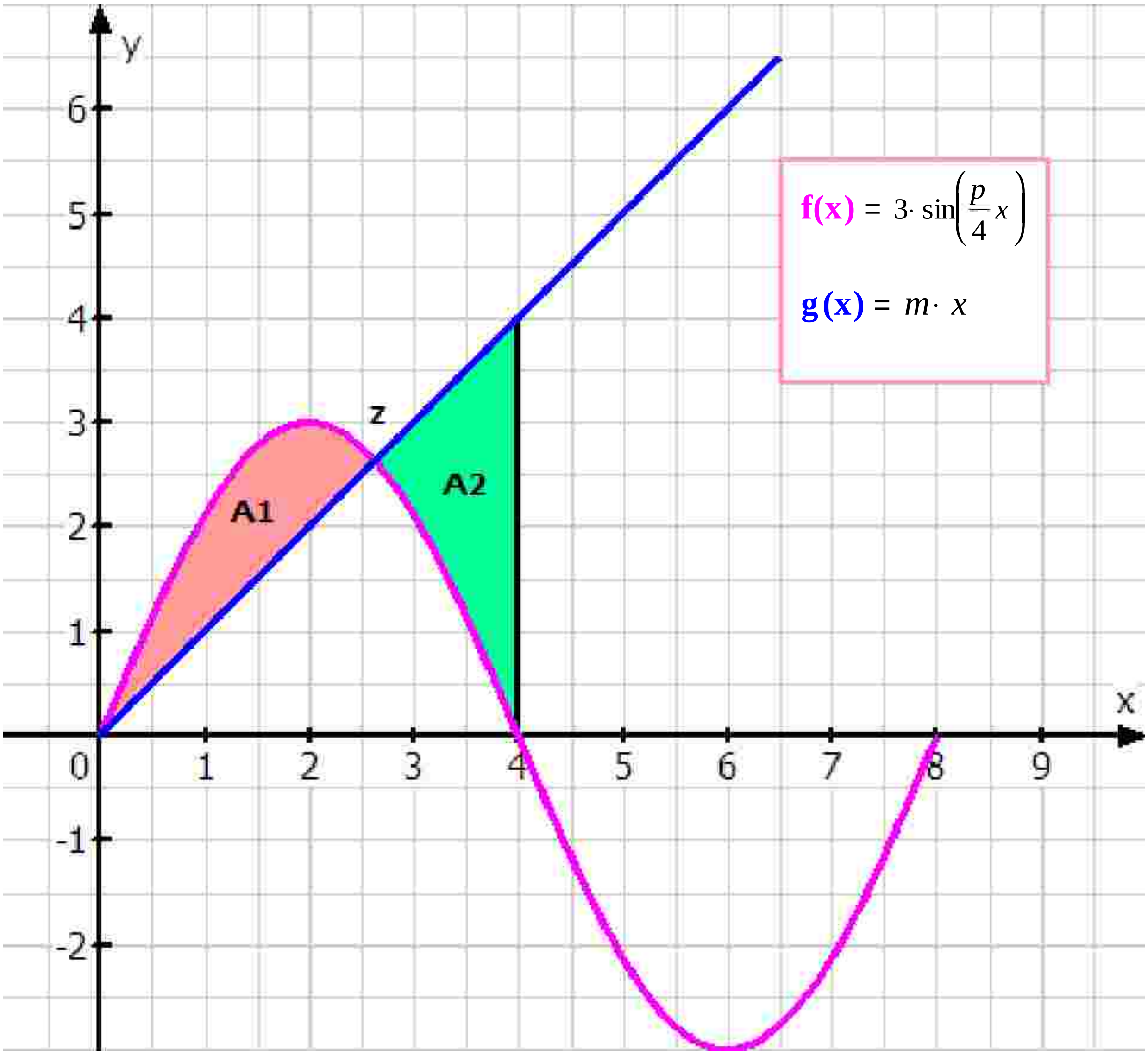
Zusammenfassung von 3 Unterrichtsstunden

Fach:	*Mathematik*	Themen:	*Analysis: Musteraufgabe Abitur (Übungsblatt 19)*
Unterricht vom:	*4.2.10*		
Erstellt am:	*6.2. bis 27.2.10*	Protokoll:	*Katharina Hahn*
Lehrer:	*C. Schmitt*	Jgst. / Kurs:	*Leistungskurs 12*

a)

$$f(x) = 3\cdot \sin\left(\frac{p}{4}x\right)$$

$$g(x) = m\cdot x$$



1.Lösungsansatz

$$\int_0^z \left(3\sin\left(\frac{p}{4}x\right)-mx\right)dx$$

$$=\left[3\left(-\cos\left(\frac{p}{4}x\right)\cdot\frac{4}{p}\right)m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^z$$

$$=-\frac{12}{p}\cdot\cos\left(\frac{p}{4}z\right)-m\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{12}{p}$$

= A1

Zuerst integrieren wir von 0 bis z dadurch erhalten wir die erste Fläche.
à A1

$$\int_z^4 \left(mx-3\sin\left(\frac{p}{4}x\right)\right)dx$$

$$=\left[m\frac{x^2}{2}+3\left(\cos\left(\frac{p}{4}x\right)\frac{4}{p}\right)\right]_z^4$$

$$=8m-\frac{12}{p}-\frac{z^2}{2}\cdot m-3\cos\left(\frac{p}{4}z\right)\cdot\frac{4}{p}$$

Dann integrieren wir von z bis 4 dadurch erhalten wir die zweite Fläche.
à A2

$$8m-\frac{12}{p}=\frac{12}{p}$$

$$8m=\frac{24}{p}$$

$$m=\frac{3}{p}$$

$$m\approx 0{,}95$$

Gleichsetzen und nach m auflösen!

= A2

2.Lösungsansatz

$$\int_0^z \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_z^4 \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\int_0^z \left(f(x)-g(x)\right)dx - \int_z^4 \left(g(x)-f(x)\right)dx = 0$$

$$\int_0^z \left(f(x)-g(x)\right)dx + \int_z^4 \left(f(x)-g(x)\right)dx = 0$$

Wir benutzen die Intervalladditivität !!!

$$\int_0^4 \left(f(x)-g(x)\right)dx = 0$$

$$\int_0^4 \left(3\sin\left(\frac{p}{4}x\right) - m\cdot x\right)dx =$$

$$\left[-3\cos\left(\frac{p}{4}x\right)\frac{4}{p} - m\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$\frac{12}{p} - 8m - \left(-\frac{12}{p}\right) =$$

$$\frac{12}{p} - 8m + \frac{12}{p} = 0$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}p \cdot \cos\left(\frac{p}{4}x\right)$$

Extremstellen berechnen!
$f'(x) = 0$

$$0 = \cos\left(\frac{p}{4}x\right)$$

$$\cos^{-1}(0) = \left(\frac{p}{4}x\right)$$

$$\frac{p}{4}x = \frac{p}{2} + kp$$

$$2k = x$$

„ k“ ist eine ungerade Zahl > 0!
à setzen Zahlen für „x“ ein, wenn was ungerades herauskommt nehmen wir die eingesetzte Zahl als Extremstelle!!!

$$2k = 2$$

$$x_{e1} = 2$$

$$2k = 6$$

$$x_{e2} = 6$$

$$f(2) = 3\sin\left(\frac{p}{4} \cdot 2\right)$$

$$y_{e1} = 3$$

y-Werte der Extremstellen durch einsetzen in f(x)!

$$f(6) = 3\sin\left(\frac{p}{4} \cdot 6\right)$$

$$y_{e2} = -3$$

$$HP(2/3)$$

$$TP(6/-3)$$

$$f''(x) = -\frac{3}{16}p^{2} \cdot \sin\left(\frac{p}{4}x\right)$$

2.Ableitung

$$f''(2) = -1{,}8 < 0 = HP$$
$$f''(6) = 1{,}8 > 0 = TP$$

Definitiv Hoch- und Tiefpunkt!

$$0 = -\frac{3}{16}p^{2} \cdot \sin\left(\frac{p}{4}x\right)$$
$$0 = \sin\left(\frac{p}{4}x\right)$$
$$kp = \frac{p}{4}x$$
$$4k = x$$

„k"= ganze Zahl

$$x_{w1} = 0$$
$$x_{w2} = 4$$
$$x_{w3} = 8$$

Wendestellen!

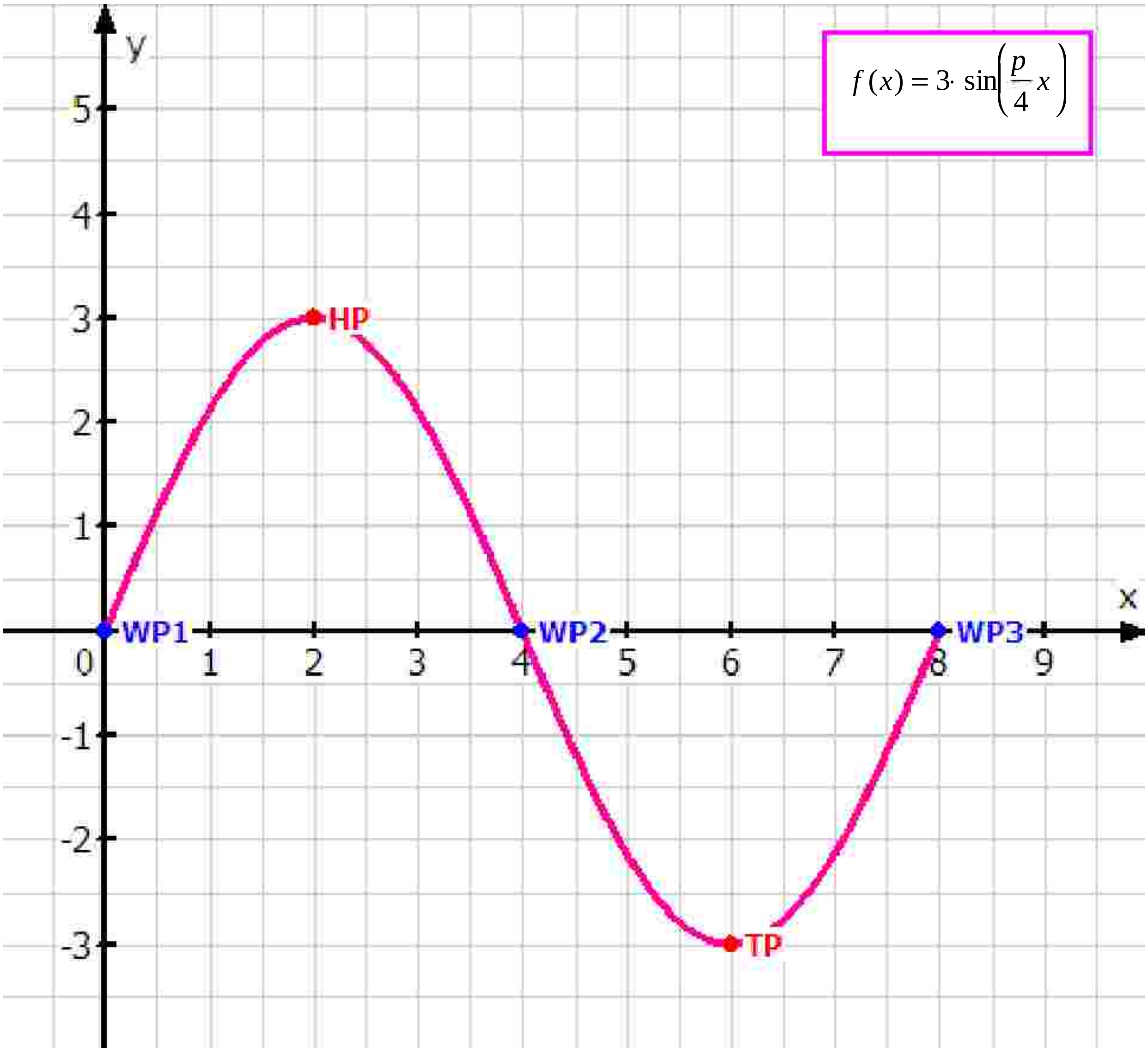
$$f(0) = 3\sin\left(\frac{p}{4} \cdot 0\right)$$
$$y_{w1} = 0$$
$$y_{w2} = 0$$
$$y_{w3} = 0$$

y-Werte der Wendestellen durch einsetzen in f(x)!

$$f'''(x) = -\cos\left(\frac{p}{4}x\right)\left(\frac{3}{64}p^{3}\right)$$
$$f'''(0) = -1{,}4 \neq 0$$
$$f'''(4) = 1{,}4 \neq 0$$
$$f'''(8) = -1{,}4 \neq 0$$

Überprüfen, ob es sich um Wendestellen handelt!

$$WP_{1} = (0/0)$$
$$WP_{2} = (4/0)$$
$$WP_{3} = (8/0)$$


$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{p}{4}x\right)$
y
x
HP
TP
WP1
WP2
WP3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
5
4
3
2
1
-1
-2
-3

Rotationsvolumen berechnen!

$$V = p \cdot \int_0^8 \left(3\sin\left(\frac{p}{4}x\right)\right)^2 dx = 9p \int_0^8 \cdot \sin^2\left(\frac{p}{4}x\right) dx$$

Integration durch <u>Substitution</u> (hier ist aber auch partielle Integration möglich)

$$g'(x) = \frac{p}{4} \qquad g(x) = \frac{p}{4}x$$

Die Stammfunktion zu f(x)= $\sin^2(x)$ haben wir früher schon ermittelt; (eines der Einführungsbeispiele zur Integration durch Substitution

$$h'(g(x)) = 9p\ \sin^2\left(\frac{p}{4}x\right) : \frac{p}{4} = \sin^2\left(\frac{p}{4}x\right)\cdot 36 = \sin^2(g(x))\cdot 36$$

$$h'(t) = 36\sin^2(t) \quad \mathrm{M} \qquad h(t) = 36\left(\frac{1}{2}(t - \sin(t)\cdot\cos(t))\right)$$

$$F(x) = h(g(x)) = 36\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p}{4}x - \sin\left(\frac{p}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{p}{4}x\right)\right)\right) = 18\cdot\frac{p}{4}x - 18\sin\left(\frac{p}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{p}{4}\right)$$

$$\left[18\frac{p}{4}x - 18\sin\left(\frac{p}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{p}{4}\right)\right]_0^8$$

$$= 36p - (0)$$
$$V = 36p$$

---

b)

April à 0 oder 12
März à -1 oder 11
Mai à 1 oder 13

Ansatz:

$$s(-1) = 100 = a + b\cdot \sin\left(-\frac{p}{6}\right)$$

Bestimmen der Koeffizienten a und b! Aufstellen der Gleichungen!

$$100 = a - \frac{b}{2}$$

$$s(1) = 200 = a + b\cdot \sin\left(\frac{p}{6}\right)$$

$$200 = a + \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} 100 = a - \frac{b}{2} \\ 200 = a + \frac{b}{2} \end{cases}$$

Lösen des Linearen Gleichungssystems durch das Additionsverfahren!

$$\Leftrightarrow 100 = a - \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} 100 = a - \frac{b}{2} \\ 300 = 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 100 \\ a = 150 \end{cases}$$

Die Koeffizienten a und b!

$$\boxed{s(t) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{p}{6} t\right)}$$

Allgemeine Gleichung!

Oktober à 6

$$s(6) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{p}{6} \cdot 6\right)$$

$$s(6) = 150$$

Anwendung der allgemeinen Gleichung für den Monat Oktober !

à Im Monat Oktober wäre die Sonnenscheindauer lt. Modell bei 150 Stunden.

$$\frac{6}{156} = 3{,}8\%$$

Prozentuale Abweichung vom Modell zur Wirklichkeit!

156Std - 150Std= 6 Std Unterschied!

$$IW_s = [50{,}250]$$

Der Sinus kann höchstens -1und 1 werden à einsetzen
Also:
$150 + 100 \cdot (-1) = 50$
und
$150 + 100 \cdot (1) = 250$

In welchem Zeitraum scheint die Sonne mehr als 235 Stunden?

$$s(t) > 235$$

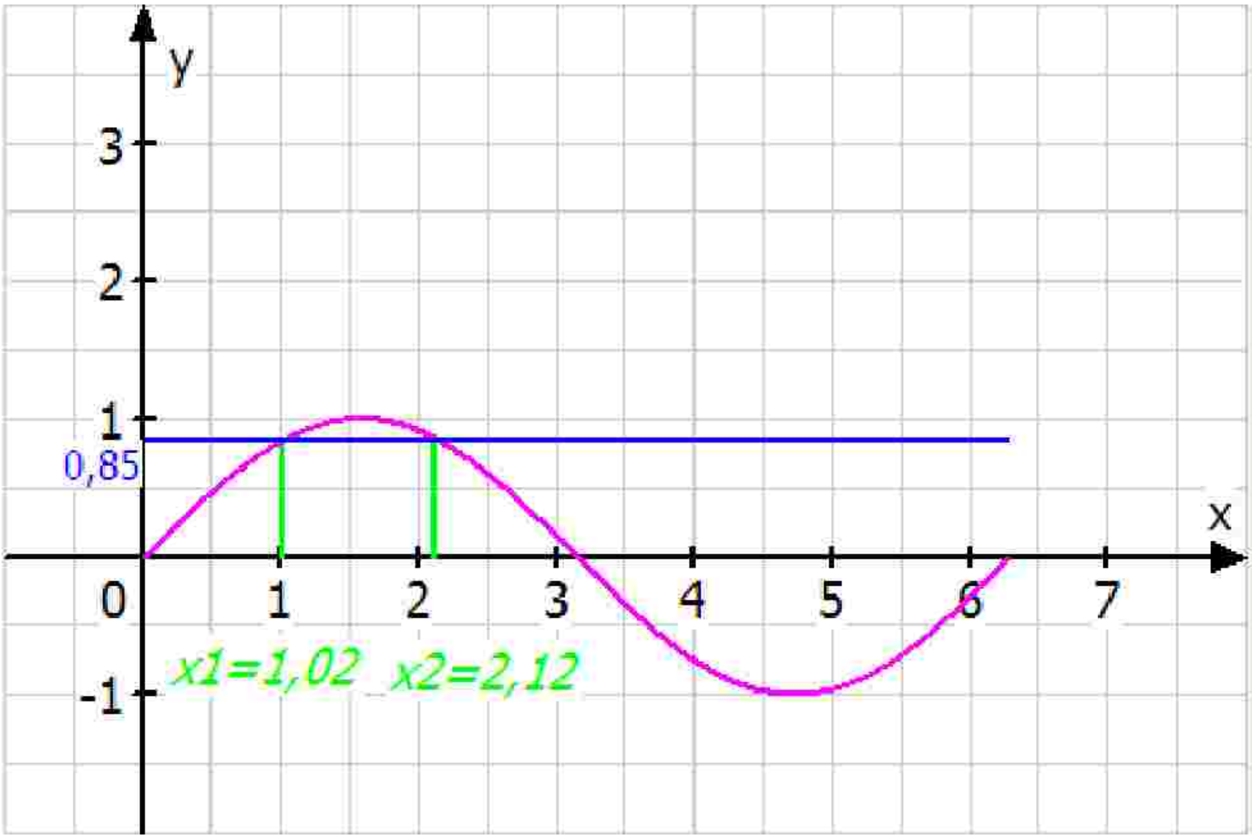
$$235 < 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$85 < 100 \cdot \sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$0{,}85 < \sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$

Betrachte zunächst die Gleichung:

$$0{,}85 = \sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$



<u>Ein</u> Wert x_1 mit Taschenrechner

$$x_1 = 1{,}02$$

$$\boxed{\sin^{-1}(0{,}85)}$$

$$x_2 = p - x_1 = 2{,}12$$

x_2 über Symmetriebetrachtung

$$\sin(1{,}02) = 0{,}85$$

$$\sin(2{,}12) = 0{,}85$$

$$\sin\left(\frac{p}{6}t\right) = 0{,}85$$

1)

$$1{,}02 = \frac{p}{6} t_1$$

$$t_1 = 1{,}95$$

2)

$$2{,}12 = \frac{p}{6} t_2$$

$$t_2 = 4{,}05$$

Das Argument $\frac{p}{6}t$ kann 1,02 oder 2,12 sein.

$$\boxed{1{,}95 < t < 4{,}05}$$

Dann liegt s(t) über 0,85!

Juni à 2
August à 4

Von Juni bis August scheint die Sonne mehr als 235 Stunden!!!

Oktober	s(6)	= 150
November	s(7)	= 100
Dezember	s(8)	= 63
Januar	s(9)	= 50
Februar	s(10)	= 63
März	s(11)	= 100

Durchschnittliche Sonnenscheindauer von Oktober bis März!

6,7,8,9, 10 und 11 einfach in die allgemeine Gleichung für „ t „ einsetzen !

$$s(t) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{p}{6} t\right)$$

$$\frac{526}{6} \approx 87{,}7$$

Der Durchschnitt liegt bei 87,7Stunden!

$$s'(t) = 100 \cdot \cos\left(\frac{p}{6}t\right) \cdot \frac{p}{6}$$

$$s''(t) = 100 \cdot \left(-\sin\left(\frac{p}{6}t\right)\right) \cdot \left(\frac{p}{6}\right)^2$$

$$s''(t) = 0 \qquad also:$$

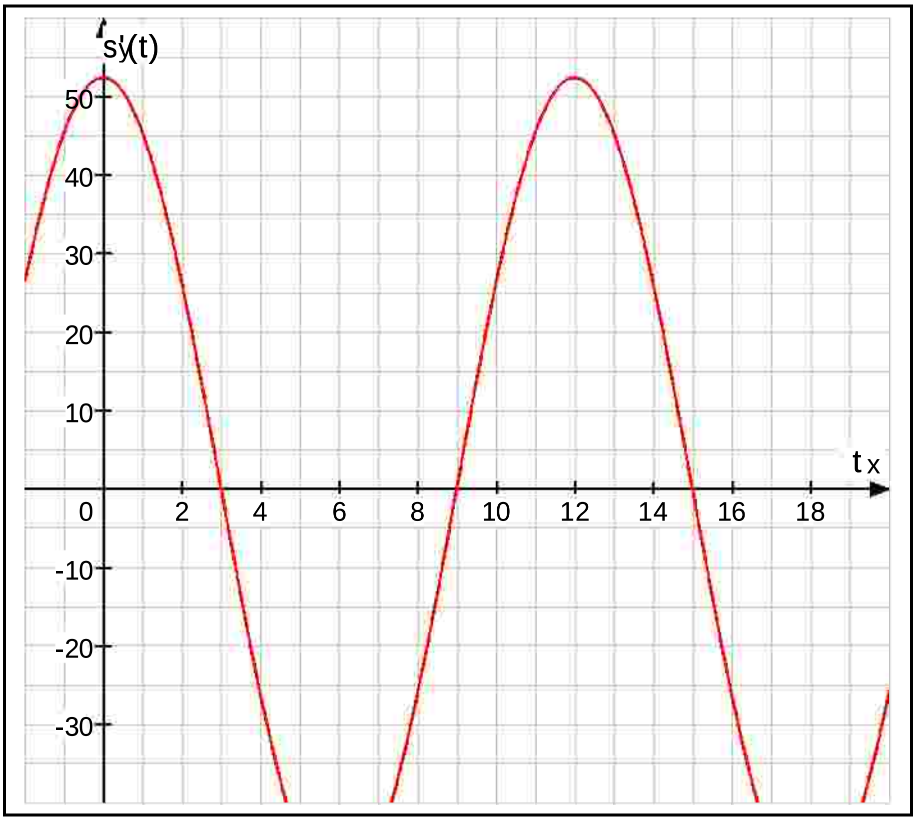
$$0 = \sin\left(\frac{p}{6}t\right)$$

$$kp = \frac{p}{6}t$$

$$6k = t$$

Wann ändert sich die Sonnenscheindauer am raschesten?

In diesem Beispiel ist s' als Änderung der Sonnenscheindauer zu verstehen; entsprechend müssen wir den Hochpunkt von s' suchen.



Es wäre also möglich: t=0, t=6, t=12, ...
Zur Klärung Bestimmung der dritten Ableitung:

$$s'''(t) = 100 \cdot \left(-\cos\left(\frac{p}{6}t\right)\right) \cdot \left(\frac{p}{6}\right)^3$$

$$s'''(0) < 0$$

$$s'''(6) > 0$$

$$s'''(12) < 0$$

Antwort demzufolge: das Maximum ist bei t=0, t=12, also im **April J !**