

**Name:**

Thema: Differenzialgleichungen

Lehrer: C. Schmitt

Bearbeitungszeit: 90 Minuten (2 Unterrichtsstunden)

Hilfsmittel: Taschenrechner (**ohne Grafik; nicht programmierbar**),  
Formelsammlung.

Beachte: a) Der Rechenweg muss bei allen Aufgabenstellungen nachvollziehbar sein.  
b) Schmierzettel werden nicht eingesammelt  
c) Zwei Formpunkte; insgesamt **58+2** Punkte

**Aufgaben:**

- 1) Begründen Sie, welche der Funktionen  $f_1(x) = x^2$ ;  $f_2(x) = 3e^x$ ;  $f_3(x) = 3e^{2x}$ ;  $f_4(x) = 2e^{3x}$  die Differenzialgleichung  $f'(x) = 3f(x)$  löst ?  
( 2 Punkte)

---

- 2) Ermitteln Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung  $f'(x) = -2f(x)$  (*ohne besonderes Verfahren, d.h. im Kopf durch „sinnvolles Probieren“*).  
Entscheiden Sie, welche der Lösungen die Bedingung  $f(0) = 2$  erfüllt.  
( 3 Punkte)

---

- 3) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch **Separation**
  - a)  $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$  mit  $f(x) \neq 0$   
( 3 Punkte)

---

  - b)  $f'(x) = -\frac{3 \cdot f(x)}{x}$  für  $x > 0$   
( 4 Punkte)

---

  - c)  $xf'(x) - 3 = f(x)$  mit  $x > 0$ ;  $f(x) > 0$   
( 6 Punkte)

---

- 4) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung in Aufgabe 3c), zeichnen Sie eine mögliche Lösungskurve und stellen Sie den Zusammenhang zu Ihrer Lösung in Aufgabe 3c) her.  
( 6 Punkte)

---

- 5) Das Wachstum von Pflanzen kann man mit dem Modell des begrenzten Wachstums beschreiben. Eine Pflanze sei 10cm groß. Sie kann höchstens 20m groß werden. Die Wachstumsrate sei 4% des Unterschiedes zwischen 20m und der jeweiligen Größe. (*Einheit auf der Zeitachse ist das Jahr*).
  - a) Bestimmen Sie bitte die Funktion, die die Größe der Pflanze beschreibt.
  - b) Berechnen Sie, nach wie viel Jahren die Pflanze eine Größe von 17m erreicht hat.  
( 10 Punkte)

6)  $f(x) \cdot e^x + f'(x) \cdot e^x = -e^{-x}$  ;  $x \in \mathbb{R}$

Separation nicht verlangt;

lösen Sie bitte trotzdem die Differenzialgleichung durch Integration.

(mit Probe)

( 7 Punkte)

---

7) Bestimme Sie alle Funktionen  $f$ , für die gilt:

Die Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x$  schneidet die  $x$ -Achse an der Stelle  $x-4$

(Zusatzpunkte für Probe, wenn alle anderen Aufgaben bearbeitet)

( 7 Punkte)

---

8) Durch Separation haben wir heraus gefunden, dass die Differenzialgleichung

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{x} \quad \text{mit } f(1) = 1$$

die Lösung  $f(x) = \frac{1}{x}$  hat.

Notieren Sie zunächst die Näherungsgleichung zum numerischen Lösungsverfahren von Euklid.

Entsprechend führen Sie bitte

a. 4 Schritte mit der Schrittweite  $h=0,5$

b. 4 Schritte mit der Schrittweite  $h=0,1$  durch.

c. Beurteilen Sie jeweils möglichst gründlich die Ergebnisse im Vergleich mit der exakten Lösung.

( 10 Punkte)

---

Nun ist es tatsächlich die letzte Mathematikarbeit Ihrer ganzen Schulzeit!

