Kurvendiskussion mit DERIVE

Funktion

#1: $f(x) := x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1$

Definitionsbereich

Da keine verbotenen Operationen auftreten können, ist der Definitionsbereich D=R.

Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs

Dazu berechnet man die Grenzwerte gegen +∞ und −∞.

#2: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#3: ∞

#4: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

#5: $-\infty$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit der x-Achse/Nullstellen einer Funktion sind die Punkte, an denen die Funktion den Funktionswert Null besitzt. Folglich wählt man den Ansatz f(x)=0 und löst nach x auf. Dies erfolgt mit dem SOLVE Befehl.

Da DERIVE hier keine explizite Lösung in #7 berechnet, lassen wir DERIVE mit dem APPROX()-Befehl die Nullstellen numerisch berechnen (siehe #8, #9). Da wir uns über dem Grundraum R befinden, können wir alle komplexen Nullstellen der Funktion (das sind die in denen die imaginäre Einheit i auftritt) vernachlässigen. Um DERIVE mitzuteilen, dass generell die Anzeige von komplexen Nullstellen weggelassen werden soll, kann man den SOLVE-Befehl auch mit "Real" als drittem Argument aufrufen (siehe #10-#13) Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Punkt (0,f(0)). Dazu berechnet man Funktionswert an der Stelle x=0 mittels f(0).

#6: SOLVE(f(x) = 0, x)

#7: $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 = 1$

#8: APPROX(SOLVE(f(x) = 0, x))

#9: $x = 0.6219597035 - 0.702437987 \cdot i \vee x = 0.6219597035 + 0.702437987 \cdot i \vee x = -0.2572172751 - 0.9814163237 \cdot i \vee x = -0.2572172751 + 0.9814163237 \cdot i \vee x = 0.8730581643 \vee x = -0.6461534271 \vee x = -1.956389593$

#10: $x = 0.8730581643 \vee x = -0.6461534271 \vee x = -1.956389593$

#11: SOLVE(f(x) = 0, x, Real)

#12: $x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 = 1$

#13: APPROX(SOLVE(f(x) = 0, x, Real))

#14: f(0)

#15: -1

Extrema

Die Extrempunkte einer Funktion findet man unter den Punkten mit waagerechter Tangente, also unter den x-Werten für die gilt: f'(x)=0. Man berechnet nun zuerst die Ableitung f'(x) mit dem ∂ Befehl und setzt dann die gewonnene Ableitung gleich Null. Diese Gleichung löst man wieder mit dem schon bekannten SOLVE Befehl.

#16: $f\_1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

#17: SOLVE(f_1(x) = 0, x, Real)

#18: $7 \cdot x^5 + 6 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x = -2 \vee x = 0$

#19: APPROX(SOLVE(f_1(x) = 0, x, Real))

#20: $x = -1.641000428 \vee x = 0$

#21: $f\_1(x) := 7\cdot x^6 + 6\cdot x^5 - 5\cdot x^4 + 4\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 2\cdot x$

#22: f(-1.641000428)

#23: $\frac{7779619547883737521204517953531828554\sim}{6103515625000000000000000000000000000\sim}\sim$ $\frac{266847069890242366021 57}{000000000000000000000000}$

#24: 12.74612866

#25: f(0)

#26: -1

#27: APPROX(f(-1.641000428))

#28: 12.74612866

Monotonieverhalten

Monotonieverhalten: Da wir eine stetige Funktion diskutieren (alle Polynomfunktionen sind stetig), können wir aus den bis jetzt gesammelten Informationen bereits das Monotonieverhalten der Funktion bestimmen. Wir wissen aus dem Grenzverhalten der Funktion, dass für x-Werte gegen -∞ auch die Funktionswerte gegen -∞ gehen. Da die Funktion bei (-1.64/12.75) ihr "am weitesten links gelegenes" Extremum hat und stetig ist [es ändert sich also das Vorzeichen der 1. Ableitung zwischen -∞ und - 1.64 nicht], muss sie für alle x < – 1.64 streng monoton steigen. Analog ergibt sich, dass die Funktion für x > 0 auch streng monoton steigen muss, da (0/–1) "der rechteste" Extrempunkt ist und die Funktion für x gegen +∞ auch gegen +∞ strebt. Da man nun leicht sieht, dass die Funktion zwischen den beiden Extrempunkten streng monoton fallend ist, ist das Monotonieverhalten der Funktion vollständig analysiert.

Wendepunkte

Wendepunkte sind Extrempunkte der ersten Ableitung. Sie werden bestimmt in dem man die zweite Ableitung mit dem ∂ Befehl berechnet und diese gleich Null setzt. Diese Gleichung löst man wieder mit dem SOLVE Befehl und erhält die x–Werte der Wendepunkte

#29: $f\_2(x) := 42\cdot x^5 + 30\cdot x^4 - 20\cdot x^3 + 12\cdot x^2 - 6\cdot x + 2$

#30: SOLVE(f_2(x), x, Real)

#31: $42\cdot x^5 + 30\cdot x^4 - 20\cdot x^3 + 12\cdot x^2 - 6\cdot x = -2$

#32: $x = -1.318137295$

#33: f(–1.318137295)

#34: $\dfrac{1069715961991492776499438031206622236\sim}{1280000000000000000000000000000000000\sim}\sim$

$$\frac{5739554258085940093 1381}{0000000000000000000000000}$$

#35: $$8.357155953$$

#36: $$f\_2(x) :≈ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

Krümmungsverhalten

Der Wendepunkt der Funktion liegt also bei (-1.32/8.36). Da wir bereits wissen, dass (-1.64/12.75) ein Hochpunkt und (0/-1) ein Tiefpunkt ist, können wir daraus schließen, dass unsere Funktion für alle x < - 1.32 rechtsgekrümmt und für alle x > - 1.32 linksgekrümmt ist.

Funktionsgraph

Zum Abschluss kann man sich mit dem "Ausdruck zeichnen" Befehl den Funktionsgraphen im 2D-Graphik-Fenster anzeigen lassen, um die gewonnenen Informationen über die Funktion zu überprüfen. Anschließend kann man den Graphen unter "Datei -> Einbetten" in das Arbeitsblatt einfügen.