Abi Aufgabe A5 (Musteraufgabe)

a.

$f_t(x) = \frac{t+ln(x)}{x}$

$$f_t'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (t + \ln(x) \cdot 1)}{x^2} = \frac{1 - \mathrm{t} - \ln(x)}{x^2}$$

$$f''_t(x) = \frac{-3 + 2t + 2\ln(x)}{x^3}$$

$f_t'''(x) = \frac{11-6t-6\ln(x)}{x^4}$

Aufgabe a :

Nullstellen: $0 = t + \ln(x)$ x=(e^{-t}/0)

$-t = \ln(x)$

$\boldsymbol{x = e^{-t}}$ $f_t(0)\ bzw. Y\ existiert\ nicht$

Extremstellen: $0 = 1 - t - \ln(x)$ $f_t(e^{1-t}) = e^{t-1}$

$\ln(x) = 1 - t$

$\boldsymbol{x = e^{1-t}}$

$$\mathrm{f_t''(e^{1-t})} = \frac{-3 + 2\mathrm{t} + 2\ln(\mathrm{e}^{1-\mathrm{t}})}{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{t})^3}} = \frac{-3 + 2\mathrm{t} + 2 - 2\mathrm{t}}{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{t})^3}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{t})^3}} < 0$$

HP :(e^{1-t}/e^{t-1})

Wendestellen: $0 = -3 + 2t + 2\ln(x)$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = e^{1,5-t}}$

$$3 = 2t + 2\ln(x)$$

$$1{,}5 - t \;= \ln(x)$$

$f_t(e^{1,5-t}) = 1{,}5\; e^{t-1{,}5}$ $\qquad$ WS: $(e^{1,5-t}/1{,}5\; e^{t-1{,}5})$

$f_t'''(e^{1,5-t}) = \frac{11-6t-6\ln\left(e^{1,5-t}\right)}{e^{(1,5-t)^4}} = \frac{11-6t-9+6t}{e^{(1,5-t)^4}} = \frac{2}{e^{(1,5-t)^4}} > 0$ $\quad$ rechts-links Kurve

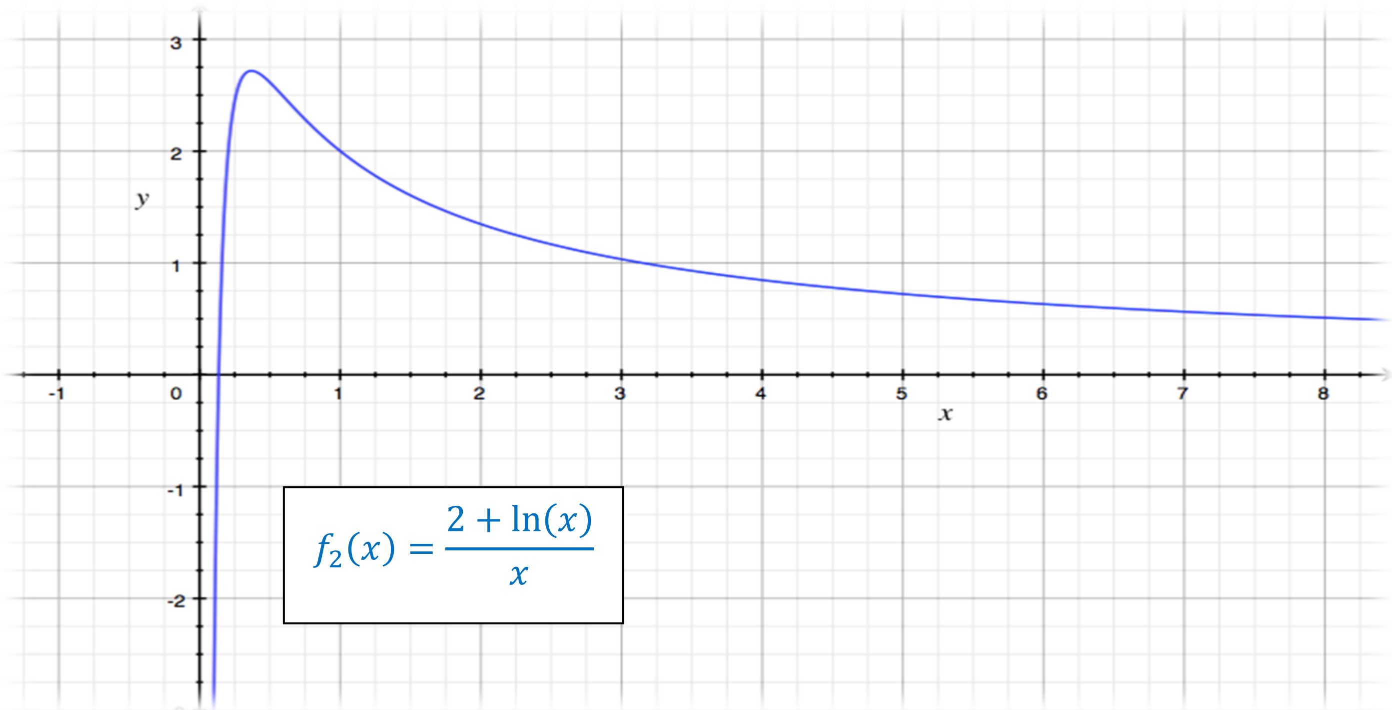
---

$\lim_{x\to o}\left(\frac{\mathrm{t}+\ln(x)}{x}\right) \to -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{t}+\ln(x)}{x}\right) \to 0$

$f_t(0{,}00000001) = \frac{t+\ln(0{,}00000001)}{0{,}00000001} \approx -18{,}4 \cdot 10^8$ $\qquad$ $f_t(10000000) = \frac{t+10000000}{10000000} \approx 1{,}61 \cdot 10^{-6}$

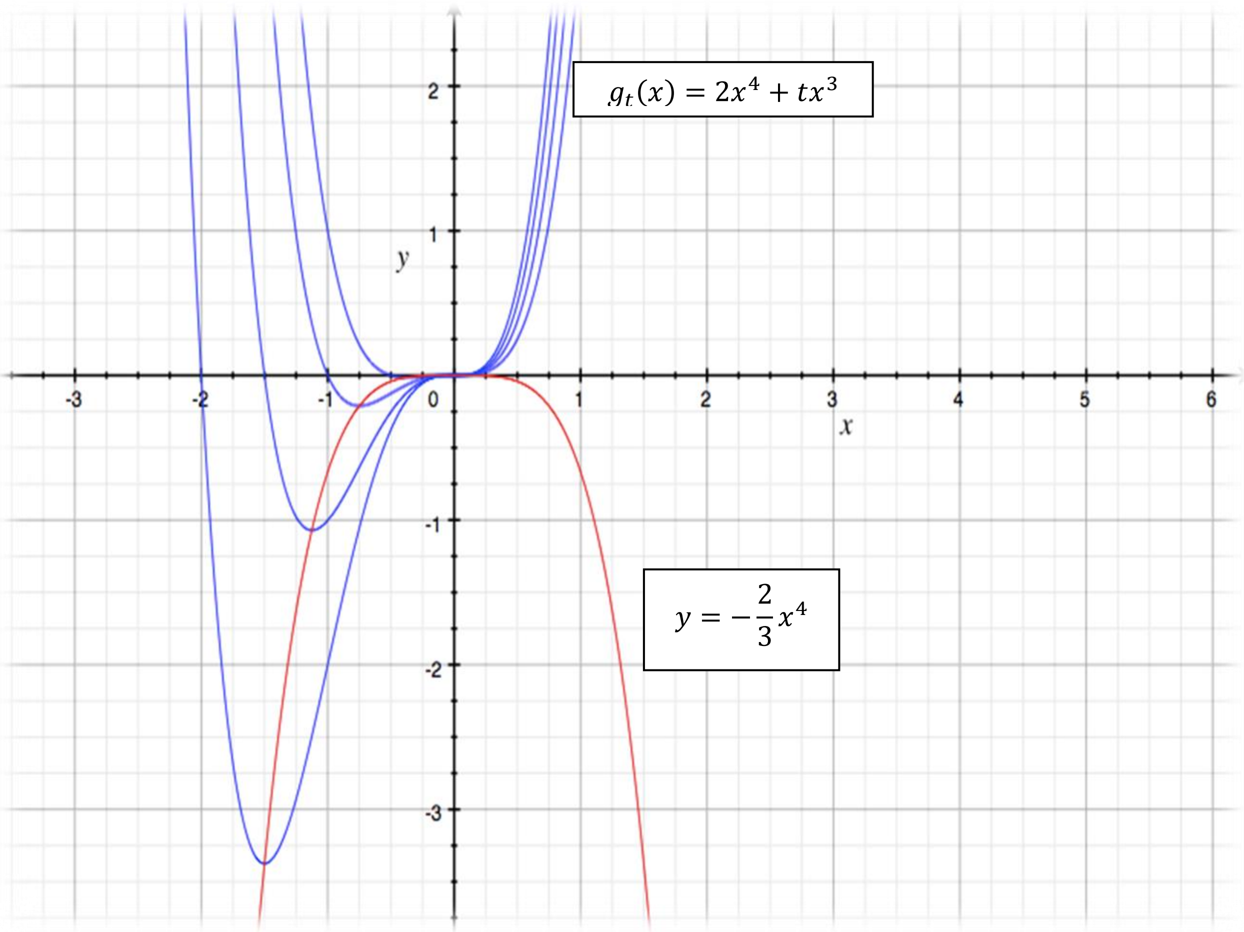
Man erkennt, dass bei sehr kleinen x-Werten kommen große negative y-Werte.

Bei großen x-Werten gehen die y-Werte gegen 0.



b.

y im 3.Schritt ist eine Ortslinie, die durch den Tiefpunkt von $g_t(x)$ verläuft. y verbindet also alle Tiefpunkte von der Kurvenschar.



$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}t\right)^4 = -\frac{27}{2048}t^4 = \textit{y-Wert vom HP}$$

Bew. $x(t) \rightarrow t \rightarrow y$

HP: (e^{1-t}/e^{t-1})

$$e^{1-\ln(x)-1} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} = p(x)$$

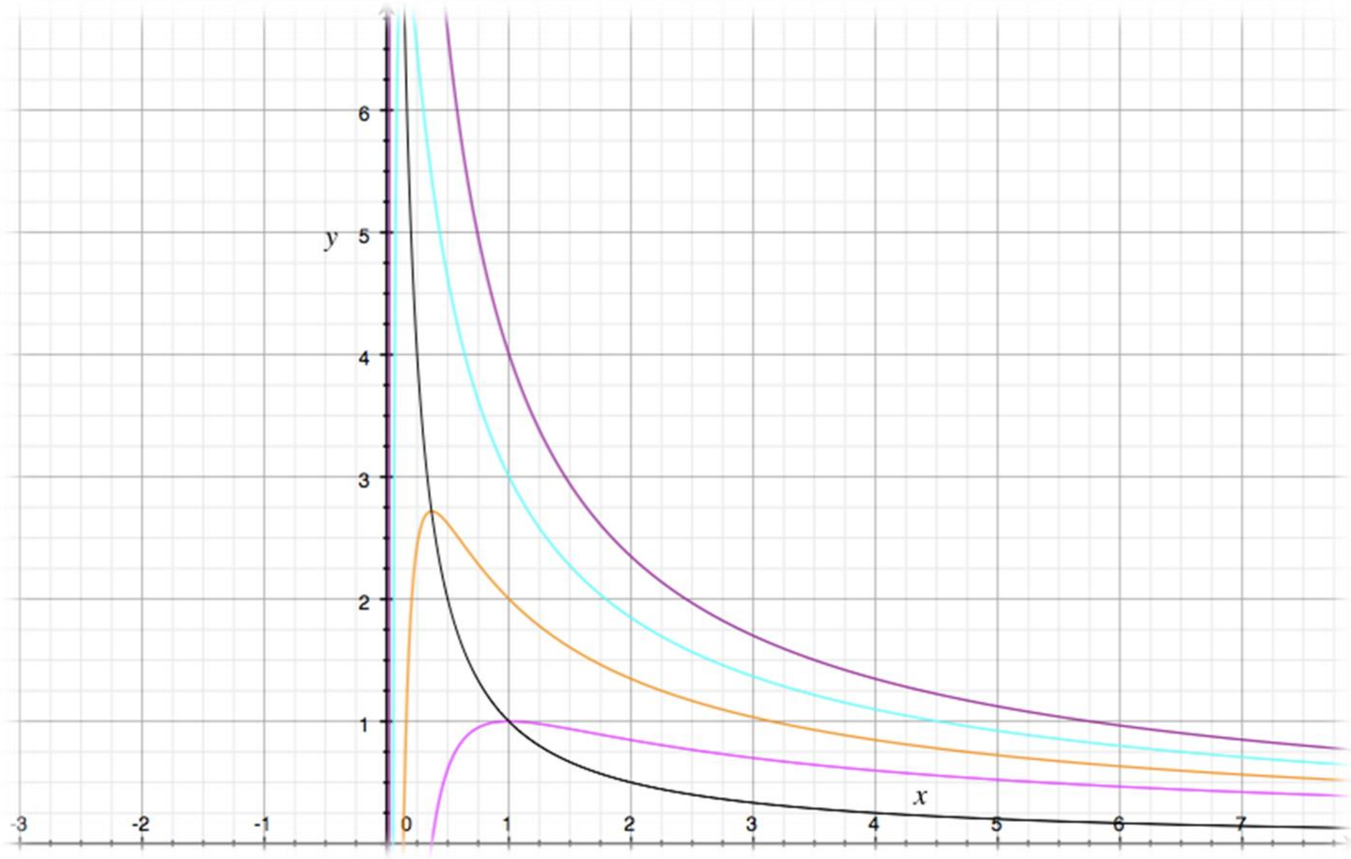
$$x = e^{1-t}$$

$$\boldsymbol{t = 1 - \ln(x)}$$

$\frac{1}{x}$ ist die Ortslinie, die die Hochpunkte der Kurvenschar $f_t(x)$ verbindet.

Das bedeutet wenn man den x-Wert des HP in den Graphen der Ortslinie einfügt, dann muss das Ergebnis der y-Wert des Hochpunktes sein.

$$p(e^{1-t}) = \frac{1}{e^{1-t}} = e^{t-1}$$



c.

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x} = \frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

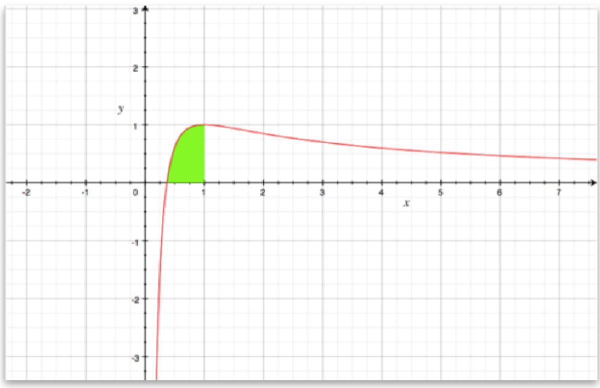
$$\int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} \left(\frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \left[t \cdot \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left[\frac{2tln(x) + (\ln(x))^2}{2}\right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left(\frac{2t \cdot (1-t) + (1-t)^2}{2}\right) - \left(\frac{2t \cdot (-t) + (-t)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2t - 2t^2 + 1 - 2t + t^2}{2}\right) + \left(\frac{2t^2 - t^2}{2}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}}$$



Egal was man für t einsetzt, in den Grenzen von e^{-t} bis e^{1-t},ergibt sich in allen Kurvenschars die Fläche $\frac{1}{2}$.

d.

$$\pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(f_2(x)\right)^2 dx = \pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(\frac{2+\ln(x)}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2} + \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{4}{x} - \frac{4\ln(x)+4}{x} - \frac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}$$

$$= \pi \left[\frac{-4 - 4\ln(x) - 4 - (\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}$$

$$= \boldsymbol{\pi \left[\frac{-10 - 6\ln(x) - (\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}}$$

Um diese Aufgabe näherungsweise zu lösen muss man verschiedene Werte für h einsetzen.

h=600

$$\pi\int_{e^{-2}}^{600}\left(\frac{2+\ln(x)}{x}\right)^2=\pi\left[\frac{-10-6\ln(x)-(\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-2}}^{600}$$

$$\pi\left[\left(\frac{-10-6\ln(600)-(\ln(600))^2}{600}\right)-\left(\frac{-10-6\ln(e^{-2})-(\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}}\right)\right]$$

$\pi(-0.15+14.78)\approx 45{,}96$

h=800

$$\pi\int_{e^{-2}}^{800}\left(\frac{2+\ln(x)}{x}\right)^2=\pi\left[\frac{-10-6\ln(x)-(\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-2}}^{800}$$

$$\pi\left[\left(\frac{-10-6\ln(800)-(\ln(800))^2}{800}\right)-\left(\frac{-10-6\ln(e^{-2})-(\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}}\right)\right]$$

$\pi(-0.12+14.78)\approx 46{,}1$

h=1000

$$\pi\int_{e^{-2}}^{1000}\left(\frac{2+\ln(x)}{x}\right)^2=\pi\left[\frac{-10-6\ln(x)-(\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-2}}^{1000}$$

$$\pi\left[\left(\frac{-10-6\ln(1000)-(\ln(1000))^2}{1000}\right)-\left(\frac{-10-6\ln(e^{-2})-(\ln(e^{-2}))^2}{e^{-2}}\right)\right]$$

$\pi(-0.1+14.78)\approx 46{,}12$

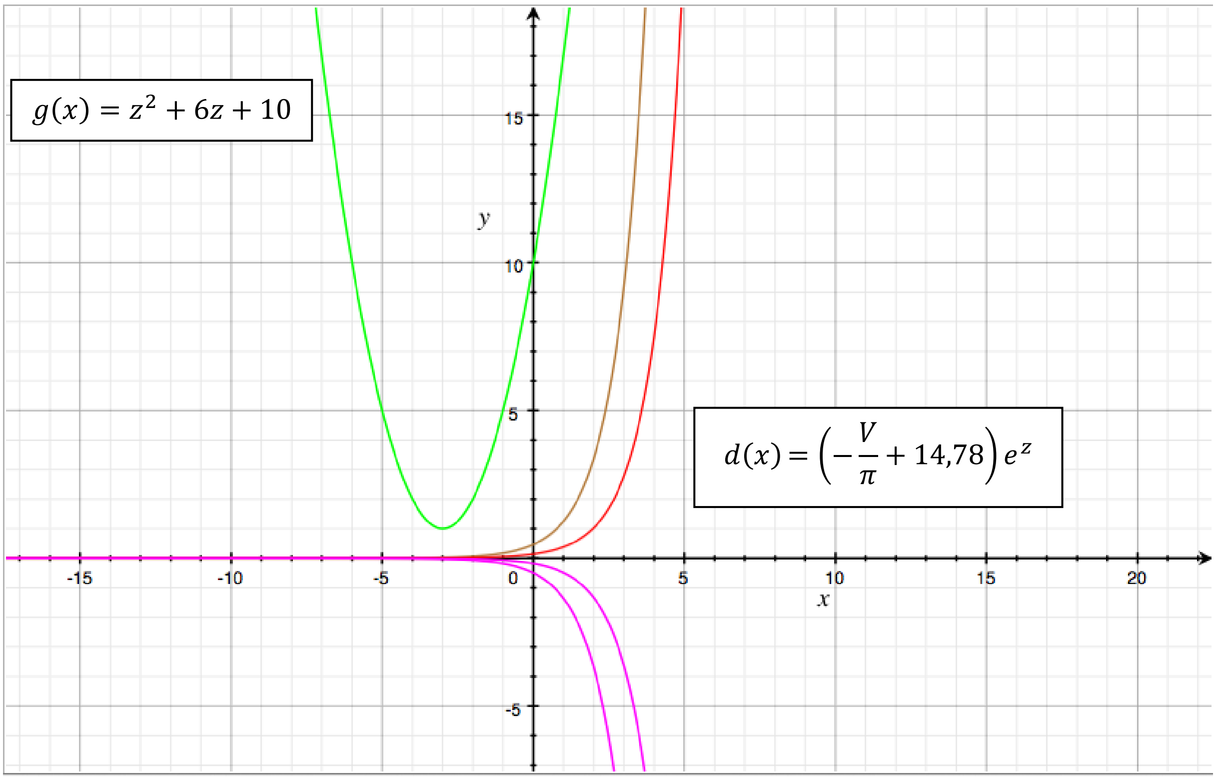
Man sieht bei unterschiedlich **großen** höhen ergeben sich minimal unterschiedliche Ergebnisse. Letztendlich ist es ungefähr 46.

Man müsste V(h) umformen, so dass man V vergibt und nach h auflöst.

Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$z^2 + 6z + 10 = \left(-\frac{V}{\pi} + 14{,}78\right) e^z \qquad\qquad z = \ln(h) \rightarrow h = e^z$$

z kann algebraisch nicht gefunden werden, also muss man einen grafischen Ansatz diskutieren. Man trennt die rechte und linke Funktion der Gleichung.



Die lila Graphen sind die, die einen negativen Wert in der Klammer der Exponentialfunktion ergeben und somit auch nicht die Parabel schneiden können.

Das bedeutet nur ein Positiver Wert in der Klammer kann die Parabel schneiden, weshalb man zum Entschluss kommt, dass die Klammer größer als 0 sein muss.

$$-\frac{V}{\pi} + 14{,}78 > 0 \qquad\qquad V < 46{,}43$$

Das heißt Werte über 46,43 würden keinen Schnittpunkt mit der der Parabel haben und somit auch nicht mit der Gleichung übereinstimmen.

Bsp.

$$-\frac{46}{\pi} + 14{,}78 = 0{,}14 > 0$$

$$-\frac{47}{\pi} + 14{,}78 < 0$$

Letztendlich kann man es nur durch Hilfe von Graphen auf ein Ergebnis kommen bzw. den Schnittpunkt herausfinden und das nur wenn Angenommen wird, dass V=46 ist.

V=46 ist der rote Graph und dessen Schnittstelle beträgt z=6,49. Somit kann man h ausrechnen.

$$h = e^{6{,}49} = 658{,}52$$