Abi Aufgabe A5 (Musteraufgabe)

a.

$f_t(x) = \frac{t+ln(x)}{x}$

$f_t'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (t + \ln(x) \cdot 1)}{x^2} = \frac{1 - \mathrm{t} + \ln(x)}{x^2}$

$f''_t(x) = \frac{-3 + 2t + 2\ln(x)}{x^3}$

$f_t'''(x) = \frac{11-6t-6\ln(x)}{x^4}$

Aufgabe a :

Nullstellen: $0 = t + \ln(x)$ x=(e^{-t}/0)

$-t = \ln(x)$

$\boldsymbol{x = e^{-t}}$

Extremstellen: $0 = 1 - t - \ln(x)$ $f_t(e^{1-t}) = e^{t-1}$

$\ln(x) = 1 - t$

$\boldsymbol{x = e^{1-t}}$

$f_t''(e^{1-t}) < 0$ HP :(e^{1-t}/e^{t-1})

Wendestellen: $0 = -3 + 2t + 2\ln(x)$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = e^{1{,}5-t}}$

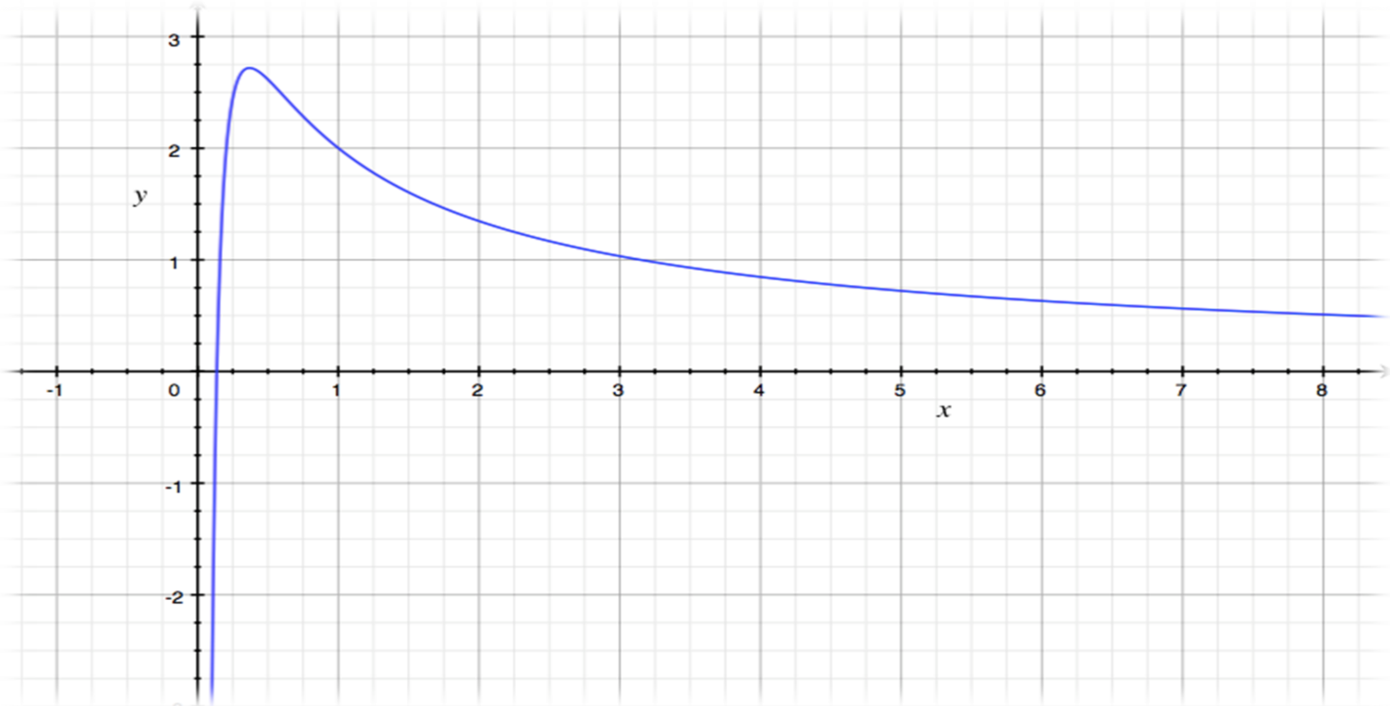
$3 = 2t + 2\ln(x)$

$1{,}5 - t = \ln(x)$

$f_t(e^{1{,}5-t}) = 1{,}5\ e^{t-1{,}5}$ $\qquad$ WS: $(e^{1{,}5-t}/1{,}5\ e^{t-1{,}5})$

$f_t'''(e^{1{,}5-t}) > 0$ rechts-links Kurve

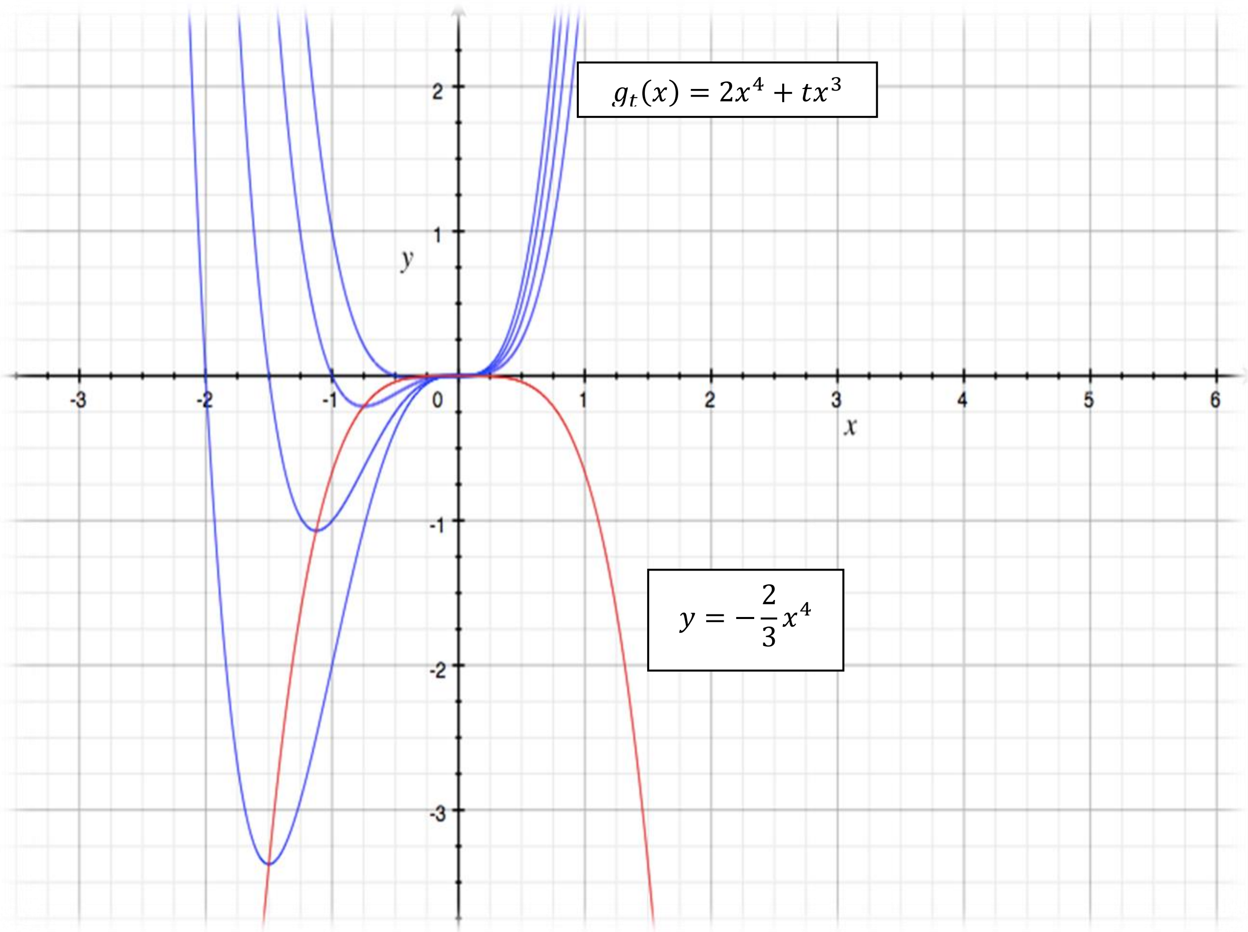
$\lim_{x\to o}\left(\frac{t+\ln(x)}{x}\right) \to -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{t+\ln(x)}{x}\right) \to 0$



$f_2(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$

b.

y im 3.Schritt ist eine Ortslinie, die durch den Tiefpunkt von $g_t(x)$ verläuft. y verbindet also alle Tiefpunkte von der Kurvenschar.



Bew. $-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}t\right)^4 = -\frac{27}{2048}t^4 =$ *y-Wert vom HP*

HP: (e^{1-t}*/*e^{t-1}*)*

$$e^{1-\ln(x)-1} = \frac{1}{x} = p(x)$$

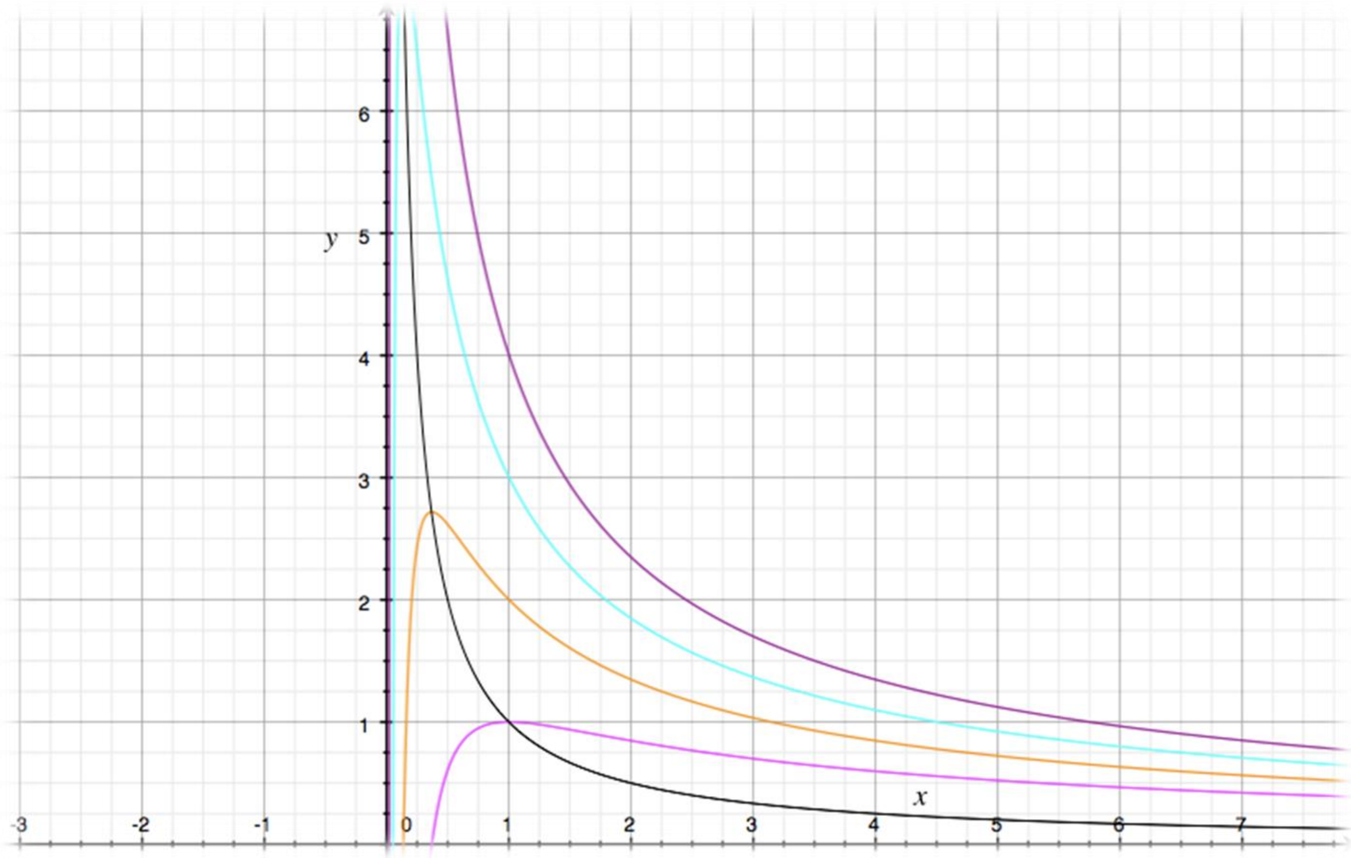
$x = e^{1-t}$

$\boldsymbol{t = 1 - \ln(x)}$

$\frac{1}{x}$ ist die Ortslinie, die die Hochpunkte der Kurvenschar $f_t(x)$ verbindet.

Das bedeutet wenn man den x-Wert des HP in den Graphen der Ortslinie einfügt, dann muss das Ergebnis der y-Wert des Hochpunktes sein.

$$p(e^{1-t}) = \frac{1}{e^{1-t}} = e^{t-1}$$



c.

$$f_t(x) = \frac{t + \ln(x)}{x} = \frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

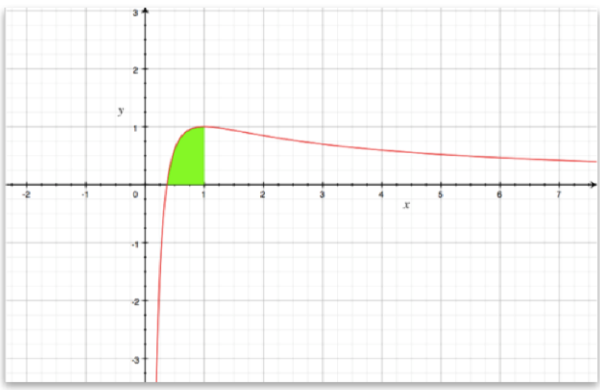
$$\int_{e^{-t}}^{e^{1-t}} \left(\frac{t}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \left[t \cdot \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left[\frac{2tln(x) + (\ln(x))^2}{2}\right]_{e^{-t}}^{e^{1-t}}$$

$$= \left(\frac{2t \cdot (1-t) + (1-t)^2}{2}\right) - \left(\frac{2t \cdot (-t) + (-t)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2t - 2t^2 + 1 - 2t + t^2}{2}\right) + \left(\frac{2t^2 - t^2}{2}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}}$$



Egal was man für t einsetzt, in den Grenzen von e^{-t} bis e^{1-t},ergibt sich in allen Kurvenschars die Fläche $\frac{1}{2}$.

d.

$$\pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(f_2(x)\right)^2 dx = \pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(\frac{2 + \ln(x)}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{e^{-2}}^{h} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4\ln(x)}{x^2} + \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{4}{x} - \frac{4\ln(x) - 4}{x} - \frac{(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}$$

$$= \pi \left[\frac{-4 - 4\ln(x) - 4 - (\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}$$

$$= \boldsymbol{\pi \left[\frac{-10 - 6\ln(x) - (\ln(x))^2}{x}\right]_{e^{-2}}^{h}}$$